高 等 学 校 理 工 科 基 础 课 教 材

# 复变函数与积分变换

于慎根　杨永发　张相梅　编著

南 开 大 学 出 版 社

天 津

# 内容简介

本书是为高等理工科院校编写的“复变函数与积分变换”的教材．内容包括：复数与复变函数，解析函数，复变函数的积分，解析函数的级数表示，残数理论及其应用，保形映射，含复参数函数的积分，拉普拉斯变换和傅里叶变换．

本书内容丰富，选材适当，重点放在加强基本理论与基本方法以及它们的基本应用上，叙述严谨，并力求做到深入浅出，通俗易懂．与同类教材比较，本书中增加了“含复参数函数积分”一章，作为推导拉普拉斯变换和傅立叶变换的逆变换的理论基础，使得积分变换的理论更严谨．本书的另一重要特色是加强了解析函数唯一性定理的应用，把解析函数的唯一性定理应用到解析函数的微分理论和拉普拉斯变换的计算上，使本书的内容更具系统性，体系更科学．

本书可以作为理工科大学“复变函数与积分变换”课程的教材，也可以供工程技术人员参考使用．

# 目　录

# 第一章　复数与复变函数

复变函数的研究对象是解析函数．研究方法是极限方法，本章先介绍复数集，然后介绍复变函数的极限和连续性．

## §1.1 复数及其运算

### 1.1.1 复数及其几何表示

设 $x$，$y$ 是两个实数，$\mathrm{i}^2=-1$，称形如 $x+\mathrm{i}y$ 或 $x+y\mathrm{i}$ 的数为一个**复数**，记为 $z$，即

$$z=x+\mathrm{i}y \text{ 或 } z=x+y\mathrm{i},$$

其中 i 称为**虚单位**; $x$ 称复数 $z$ 的**实部**，记为 $\mathrm{Re}\,z$ ; $y$ 称复数 $z$ 的**虚部**，记为 $\mathrm{Im}\,z$ .

当虚部 $y$=0 时，复数 $z$ 就是实数；当实部 $x$=0 时，若虚部 $y\neq0$，复数 $z=\mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**；两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$ .

一个复数由它的实部和虚部，即由一对有序实数所唯一确定；而在平面上取直角坐标系后，在坐标平面上的任一点，也由一对有序实数所唯一确定．把复数 $z=x+\mathrm{i}y$ (以后在不作特殊声明的情况下，形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数中的 $x$ 和 $y$ 均指实数)与平面上的坐标为$(x, y)$的点相互对应，于是在一切复数所组成的集合与平面上的一切点组成的集合之间，构成一一对应．一切实数所成的集，与横轴上一切点组成的集相对应；一切纯虚数所组成的集，与纵轴上的一切点(除去原点外)所组成的集相对应．因此把横轴称为实轴，纵轴称为虚轴．实轴在原点右方及左方

的部分，分别称为正实轴及负实轴；在实轴的上方及下方的半平面，分别称为上半平面及下半平面；虚轴的左方及右方的半平面，分别称为左半平面及右半平面；如果用平面上的点表示复数，那么这个平面就称**复平面**，或按照表示复数的字母 $z, w, \ldots$称为 $z$ 平面，$w$ 平面等等.

“复数 $z = x + \mathrm{i}y$ ”与“点 $x + \mathrm{i}y$ ”用做同义语，“复数集”与“平面点集”也做同义语.

在复平面上，从原点出发到点 $z = x + \mathrm{i}y$ 所引的向量与该复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 也构成一一对应(复数零对应着零向量). 因此，有时也把“复数”与“二维向量”，“复数集”与“向量集”用做同义语. 向量 $z = x + \mathrm{i}y$ 的长度称为复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的**模**，记为

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1-1}$$

当 $z \neq 0$ 时，实轴的正向与向量 $z$ 之间的夹角称为复数 $z$ 的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}\, z$；显然 $\mathrm{Arg}\, z$ 有无穷多个值，其中每两个相差 $2\pi$的整数倍，但 $\mathrm{Arg}\, z$ 只有一个值$\alpha$满足条件$-\pi < \alpha \leqslant \pi$，它称为 $z$ 的辐角主值，记为 $\arg z$. 显然,

$$\mathrm{Arg} z = \arg z + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \cdots). \tag{1-2}$$

$\arg z$ 与反正切 $\mathrm{Arc}\tan\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 有如下的关系：

$$\mathop{\arg z}_{z\neq 0} = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当}z\text{在第一象限时;} \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{当}z\text{在第二象限时;} \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{当}z\text{在第三象限时;} \\ \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当}z\text{在第四象限时.} \end{cases}$$

**例 1.1** 计算复数 $z = -3 + 4\mathrm{i}$ 的模和辐角.

**解：** $|z| = |(-3) + 4\mathrm{i}| = \sqrt{9 + 16} = 5$，因为 $z$ 在第二象限，故

$$\operatorname{Arg}(-3+4\mathrm{i}) = \arctan\frac{4}{-3} + 2k\pi + \pi$$
$$= (2k+1)\pi - \arctan\frac{4}{3},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

零没有确定的辐角，或者说零没有辐角；零的模为零.

复数 $z$ 的实部和虚部可用它的模和辐角表出：

$$\operatorname{Re} z = |z|\cos\theta, \quad \operatorname{Im} z = |z|\sin\theta,$$

其中 $\theta = \operatorname{Arg} z$ ,于是 $z$ 本身可表示为

$$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \tag{1-3}$$

这个式子称为 $z$ 的**三角表示式**.

用符号 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，就有

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{1-4}$$

它称为 $z$ 的**指数表示式**，或**欧拉**( Euler)**表示式**.

称复数 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ 为复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的共轭复数．显然，$z$ 与 $\bar{z}$ 关于实轴对称(图 1-1)．因此

$$|\bar{z}| = |z|, \quad \operatorname{Arg}\bar{z} = -\operatorname{Arg} z, \quad \operatorname{Re}\bar{z} = \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im}\bar{z} = -\operatorname{Im} z$$

等式 $\operatorname{Arg}\bar{z} = -\operatorname{Arg} z$ 应理解为：对于左边 $\operatorname{Arg}\bar{z}$ 的任一个值，右边的 $-\operatorname{Arg} z$ 必有一对应值使等式成立，反之亦然.

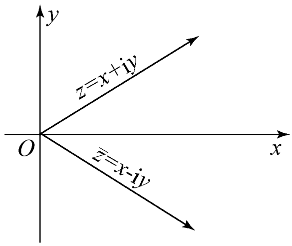


图 1-1

与实数集不同，复数没有定义大小关系．对复数不定义其大小，不是不为，而是不能．首先实践中没提出复数要比较大小的问题．东西有多寡，故自然数有大小．而整数间的大小关系和实数间的大小关系，是由数的“绝对正负”产生的．复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与复数 $-z = -x - \mathrm{i}y$ 可以说是一种相对的“互为负”的关系，并没有绝对的正与负之分(如−2+3i 和 2−3i 是互为相反数，但不能说其中哪一个是正数，哪一个是负数)．其次即使单从理论上看，也不能认为复数之间可规定一种大小．因为不能随便地确定复数的大小关系(这样可能把复数搞

乱)，任何方法所规定的复数大小，必须满足一些起码的条件，比如，设 $z_1, z_2, z_3$ 为复数：

(1) 若 $z_1 < z_2$， $z_2 < z_3$，则 $z_1 < z_3$；

(2) 若 $z_1 < z_2$， $z_1 > z_2$，则 $z_1 = z_2$；

(3) 若 $z_1 < z_2$，则 $z_1 + z_3 < z_2 + z_3$；

(4) 若 $z_1 < z_2$， $z_3 > 0$，则 $z_1 z_3 < z_2 z_3$.

我们说，不可以在复数之间规定一种大小同时满足这四个条件. 假如可以规定这样一种大小，可以证明，若 $z \neq 0$，则 $z^2 > 0$，据此有 $1=1^2>0$，由(3)两边加$-1$ 得 $0>-1$，但$-1=\mathrm{i}^2>0$，即 $0<-1$. $0>-1$ 与 $0<-1$ 同时成立，这与(2)矛盾.

### 1.1.2 复数的运算

两复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$， $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的加法和乘法运算由下列等式定义：

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2), \tag{1-5}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1), \tag{1-6}$$

减法和除法定义为加法和乘法的逆运算，于是有

$$z_1 - z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2), \tag{1-7}$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad x_2 + \mathrm{i}y_2 \neq 0.\end{aligned} \tag{1-8}$$

可以证明，复数的加减乘除(除数不为零)运算与实数的加减乘除运算满足同样一些法则(如交换律、结合律、分配律).

据式(1-5)可知，复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 及 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相加与向量 $z_1$ 及 $z_2$ 相加的规律一致，在力学和物理学中，力、速度、加速度等都可用向量来表示，这说明了复数可用来表示某些实际的物理量. 当非零向量 $z_1$、$z_2$ 不共线时(图 1-2)，作起点在原点的向量 $z_1$ 及 $z_2$，以 $z_1$ 及 $z_2$ 为边

作平行四边形，从原点出发沿对角线所作的向量就表示 $z_1+z_2$，当 $z_1$ 及 $z_2$ 的方向相同或相反时，$z_1+z_2$ 也容易作出．由于 $-z_2$ 表示与 $z_2$ 长度相同，方向相反的向量(称 $z_2$ 的反向量)，而且 $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$，可以仿照 $z_1+z_2$ 的情形作出 $z_1-z_2$ (图1-2)；显然，复数相减与向量相减的法则也一致．

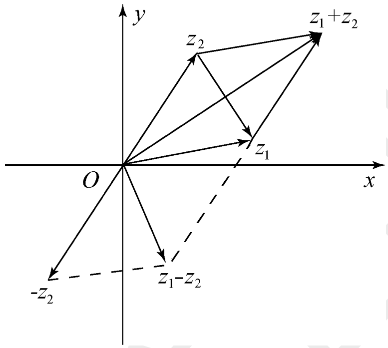



图 1-2

以下导出两复数的和及差的模的几个不等式，如图1-2，从点 $z_1$ 出发到 $z_1+z_2$ 的向量是向量 $z_2$，于是$|z_1|$，$|z_2|$及$|z_1+z_2|$构成一个三角形的三边，故有

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|, \tag{1-9}$$

$$|z_1+z_2| \geqslant \|z_1|-|z_2\|. \tag{1-10}$$

在式(1-9)及式(1-10)中，用 $-z_2$ 代替 $z_2$ 就得到

$$|z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|, \tag{1-11}$$

$$|z_1-z_2| \geqslant \|z_1|-|z_2\|. \tag{1-12}$$

也可直接证明式(1-11)及式(1-12)．其实在图 1-2 中，从点 $z_2$ 出发到点 $z_1$ 的向量就是 $z_1-z_2$，考虑向量 $z_1$，$z_2$ 及 $z_1-z_2$ 所构成的三角形，就可推出这两个不等式．从图 1-2 还可看出：$|z_1-z_2|$表示点 $z_1$ 及 $z_2$ 的距离．此外不难证明，即使向量 $z_1$，$z_2$ 及 $z_1+z_2$ 共线，式(1-9)及式(1-10)仍然成立．

关于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模，还有下列关系：

$$|z|\geqslant|\operatorname{Re}z|, \tag{1-13}$$

$$|z|\geqslant|\operatorname{Im}z|, \tag{1-14}$$

$$|z|^2=z\bar{z}. \tag{1-15}$$

利用复数四则运算，易得下列等式

$$z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z; \tag{1-16}$$

$$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\operatorname{Im}z; \tag{1-17}$$

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2; \tag{1-18}$$

$$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2; \tag{1-19}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq 0). \tag{1-20}$$

把非零复数 $z_1$ 及 $z_2$ 写成三角表示式：

$$z_1=|z_1|(\cos\operatorname{Arg}z_1+\mathrm{i}\sin\operatorname{Arg}z_1),$$

$$z_2=|z_2|(\cos\operatorname{Arg}z_2+\mathrm{i}\sin\operatorname{Arg}z_2).$$

由乘法定义得

$$z_1z_2=|z_1||z_2|[\cos(\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2)+\mathrm{i}\sin(\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2)]$$

据此得

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \tag{1-21}$$

及

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2. \tag{1-22}$$

式(1-22)应理解为：对于 $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值，一定有 $\operatorname{Arg}z_1$ 及 $\operatorname{Arg}z_2$ 的某一值与之对应，使得等式成立，反之亦然. 其次由除法的定义得

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq 0), \tag{1-23}$$

及

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 \quad (z_1 \neq 0, \quad z_2 \neq 0), \tag{1-24}$$

等式(1-24)应与等式(1-22)类似地理解．由此知：

(1) 两非零复数乘积是一个复数，其模等于它们模的乘积，其辐角等于它们辐角的和;

(2) 两非零复数商是一个复数，其模等于它们模的商，其辐角等于它们辐角的差.

因此，当用向量表示复数时，可以说两非零向量 $z_1$，$z_2$ 的积 $z_1z_2$ 是一个向量，它是由向量 $z_1$ 旋转一个角度 $\operatorname{Arg} z_2$ 并伸长(或缩短)到 $|z_2|$ 倍得到的(图 1-3)，特别是有，当 $|z_2|=1$ 时，乘法变成了只是旋转，如 $\mathrm{i}z_1$ 相当于 $z_1$ 逆时针旋转 90°；又当 $\operatorname{Arg} z_2=0$ 时，乘法变成了仅仅是伸长(或缩短).

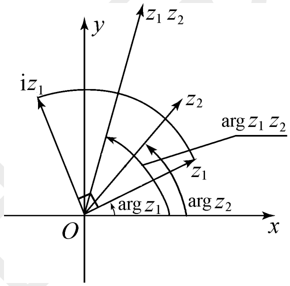



图 1-3

类似地，可描述两个非零复数商的几何意义.

最后考虑复数的乘幂，设 $z \neq 0$，$n$ 为正整数，$z^n$ 表示 $n$ 个复数 $z$ 的乘积，由乘法运算法则得

$$z^n = |z|^n [\cos(n\operatorname{Arg} z) + \mathrm{i}\sin(n\operatorname{Arg} z)],$$

若规定 $z^0=1$，这公式当 $n=0$ 时也成立．定义

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{|z|^n [\cos(n\operatorname{Arg} z) + \mathrm{i}\sin(n\operatorname{Arg} z)]}$$
$$= |z|^{-n} [\cos(-n\operatorname{Arg} z) + \mathrm{i}\sin(-n\operatorname{Arg} z)].$$

则对任意的整数 $m$，有

$$z^m = |z|^m [\cos(m\operatorname{Arg} z) + \mathrm{i}\sin(m\operatorname{Arg} z)] \tag{1-25}$$

当 $|z|=1$ 时，得棣莫佛(De Moivre)公式：

$$z^m = \cos(m\operatorname{Arg} z) + \mathrm{i}\sin(m\operatorname{Arg} z). \tag{1-26}$$

设 $n(n \geqslant 2)$为正整数，定义 $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$ 为满足 $w^n = z$ 的复数 $w$，并称

它为 $z$ 的 $n$ 次根．为求出根 $w=\sqrt[n]{z}$，令

$$z=|z|(\cos \operatorname{Arg} z+\mathrm{i}\sin \operatorname{Arg} z),$$
$$w=|w|(\cos \operatorname{Arg} w+\mathrm{i}\sin \operatorname{Arg} w).$$

由

$$\begin{aligned} w^n &=|w|^n[\cos(n\operatorname{Arg} w)+\mathrm{i}\sin(n\operatorname{Arg} w)] \\ &=|z|(\cos \operatorname{Arg} z+\mathrm{i}\sin \operatorname{Arg} z), \end{aligned}$$

知 $|w|=|z|^{\frac{1}{n}}$, $\operatorname{Arg} w=\dfrac{1}{n}\operatorname{Arg} z$．设 $\varphi$ 是 $\operatorname{Arg} z$ 的某一值，则

$$\operatorname{Arg} w=\frac{1}{n}(\varphi+2k\pi),\ (k=0,\pm1,\cdots).$$

故有

$$\begin{aligned} w &= z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z} \\ &=|z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad (k=0,\pm1,\cdots). \end{aligned} \tag{1-27}$$

式(1-27)中，取 $k=0, 1,2, \ldots, n-1$，可得 $n$ 个相异的根，分别记为 $w_0$, $w_1$, … $w_{n-1}$．显然 $k$ 还可取其它值，但得不到不同的新根．事实上，设 $r$, $s$ 是两个不同的整数，且 $0\leqslant r\leqslant n-1$, $0\leqslant s\leqslant n-1$，则有 $w_r$, $w_s$ 是其对应的两个根，因

$$\operatorname{Arg} w_r-\operatorname{Arg} w_s=\frac{\varphi+2r\pi}{n}-\frac{\varphi+2s\pi}{n}=\frac{r-s}{n}2\pi.$$

而 $0<\dfrac{r-s}{n}<1$，故 $\operatorname{Arg} w_r-\operatorname{Arg} w_s\neq 2k\pi$，从而知 $\operatorname{Arg} w_r\neq\operatorname{Arg} w_s$，故 $w_r\neq w_s$．这说明 $w_0$, $w_1$, … $w_{n-1}$ 中任二值不相同．又设 $k=nq+r$，$q$, $r$ 为整数且 $q\neq 0$, $0\leqslant r\leqslant n-1$，则

$$\mathrm{Arg}w_k = \frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi) = \frac{1}{n}[\varphi + 2(nq + r)\pi]$$
$$= \frac{1}{n}(\varphi + 2r\pi) + 2q\pi = \mathrm{Arg}w_r.$$

故 $w_k = w_r$，这说明 $\sqrt[n]{z}$ 只有 $n$ 个不同的根 $w_0, w_1, \dots w_{n-1}$. 显然，这 $n$ 个根在复平面上表示为：以原点为中心，$\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆内接正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点.

**例 1.2** 设 $z_1$ 及 $z_2$ 是两个复数，求证

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

**证** 
$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})$$
$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$
$$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

**例 1.3** 设 $z = x + \mathrm{i}y$，证明

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |x| + |y|.$$

**证** 显然 $|z| = |x + \mathrm{i}y| \leqslant |x| + |y|$. 故只须证 $|x| + |y| \leqslant \sqrt{2}\,|z|$. 因

$$2|x||y| \leqslant |x|^2 + |y|^2,$$

故

$$|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \leqslant 2(|x|^2 + |y|^2).$$

从而

$$(|x| + |y|)^2 \leqslant 2(|x|^2 + |y|^2),$$
$$|x| + |y| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{2}\,|z|.$$

**例 1.4** 求 $\sqrt[4]{1 + \mathrm{i}}$ 的值.

**解** 由 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$，得

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}&=\sqrt[8]{2}[\cos\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]\\&=\sqrt[8]{2}[\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}][\cos\frac{k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2}],\qquad (k=0,1,2,3).\end{aligned}$$

于是 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$ 的根为 $w_0,\mathrm{i}w_0,-w_0,-\mathrm{i}w_0$，其中 $w_0=\sqrt[8]{2}[\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}]$.

还要特别注意，虽有 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2$，但

$$\mathrm{Arg}\,z^2=\mathrm{Arg}\,z+\mathrm{Arg}\,z\neq 2\mathrm{Arg}\,z.$$

例如,

$$\mathrm{Arg}\mathrm{i}^2=\pi+2k\pi,\quad (k=0,\pm1,\cdots).$$

$$2\mathrm{Arg}\mathrm{i}=2(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=\pi+4k\pi\qquad (k=0,\pm1,\cdots).$$

$3\pi$是 $\mathrm{Arg}\mathrm{i}^2$ 的一值，但 $3\pi$不是 $2\mathrm{Arg}\mathrm{i}$ 的值，可知 $\mathrm{Arg}\mathrm{i}^2\neq 2\mathrm{Arg}\mathrm{i}$.

## § 1.2 复平面上的点集

满足一定条件的复数 $z$ 的一个集合表示复平面上的一个点集，讨论复变函数及其有关的概念，要涉及一些特殊的点集，本节将介绍这些点集.

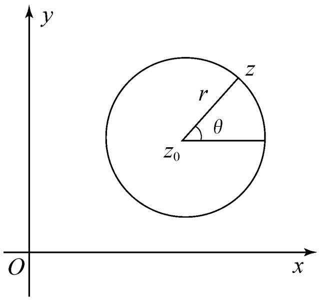



图 1-4

在复平面上，方程 $|z-z_0|=r$ $(r\geqslant 0)$ 表示到定点 $z_0$ 的距离为 $r$ 的点的集合，即 $z_0$ 为中心以 $r$ 为半径的圆周(图 1-4)，显然，上述圆周还可表示为

$$z-z_0=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

由

$$|z-z_0|=r\text{，即 }|z-z_0|^2=r^2,$$

或

$$(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=r^2,$$

得

$$z\bar{z}+z_0\bar{z}_0-z\bar{z}_0-z_0\bar{z}=r^2.$$

令 $\beta=-z_0$，$\alpha=z_0\bar{z}_0-r^2$，上式成为

$$z\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+\alpha=0.$$

于是圆周 $|z-z_0|=r(r\geqslant 0)$ 也可用上述这种形式的方程来表示；反之，上边方程也表示以 $-\beta$ 为中心，以 $\sqrt{|\beta|^2-\alpha}$ (当 $|\beta|^2-\alpha\geqslant 0$ 时)为半径的圆周.

**定义 1.1** 满足 $|z-z_0|<\delta(\delta>0)$ 点的全体，称为点 $z_0$ 的一个 **$\delta$ 邻域**，记为 $N(z_0,\delta)$ 或 $N_\delta(z_0)$.

**定义 1.2** 给定复平面上的点集 $E$ 及一点 $z_0$，若 $z_0$ 的任一邻域中至少含有 $E$ 的一个异于 $z_0$ 的点，则称 $z_0$ 为 $E$ 的一个**聚点**或**极限点**.

由定义看出，点集 $E$ 的聚点可属于 $E$，也可不属于 $E$，若 $E$ 的每个聚点都在 $E$ 内，则称 $E$ 为**闭集**.

**定义 1.3** 点集 $E$ 中非聚点的点称为 $E$ 的**孤立点**；若点 $z_0$ 的任一邻域内，既有 $E$ 中的点，又有不属于 $E$ 的点，则 $z_0$ 称为 $E$ 的**边界点**. 点集 $E$ 的全部边界点所组成的集，称为 $E$ 的**边界**.

由定义看出，边界点既可属于 $E$，也可不属于 $E$；边界点可能是聚点，也可能是孤立点；孤立点必是边界点，边界点却不一定是孤立点.

**定义 1.4** 给定集 $E$，若 $E$ 内的点 $z_0$ 的某邻域含于 $E$ 内，则称 $z_0$ 为 $E$ 的**内点**；若 $E$ 的每点都是它的内点，则称 $E$ 为**开集**.

**定义 1.5** 若对集 $E$ 中任意两点，总存在连接这两点的折线，而折线上的点都属于 $E$，则称集 $E$ 是**连通集**.

**定义 1.6** 连通的开集称为**区域**；区域 $D$ 连同其边界称为**闭区域**，记为 $\overline{D}$.

**定义 1.7** 若对集 $E$，存在实数 $M>0$，使 $E$ 中任一点 $z$ 满足 $|z|<M$，或者说存在 $G$：$|z|<M$，使 $G\supset E$，则称 $E$ 为**有界集**. 非有界集称为**无界集**. 如果区域 $D$ 是有界集，那么称它为**有界区域**，否则称它为**无界区域**.

一般区域的边界可能十分复杂，为了研究一般的区域，下边介绍曲线的概念.

**定义 1.8** 设 $x(t)$ 及 $y(t)$ 是实变数 $t$ 的两个实函数，在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则由方程组

$$\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t), \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

或表示为复数方程

$$z=x(t)+\mathrm{i}y(t), \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{1-28}$$

(简记为 $z=z(t)$)所确定的点集 $C$，称为 $z$ 平面上的一条**连续曲线**. 式(1-28)称为 $C$ 的参数方程，$z(\alpha)$ 及 $z(\beta)$ 分别称为 $C$ 的起点和终点；满足 $\alpha<t_1<\beta$，$\alpha\leqslant t_2\leqslant\beta$，$t_1\neq t_2$ 的 $t_1$ 及 $t_2$，当 $z(t_1)=z(t_2)$ 成立时，点 $z(t_1)$ 称为 $t$ 的**重点**；凡无重点的连续曲线称为**简单曲线**或**约当曲线**；满足条件 $z(\alpha)=z(\beta)$ 的简单曲线称为**简单闭曲线**.

**定义 1.9** 设简单(或简单闭)曲线 $C$ 的参数方程为

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t), \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

又在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上 $x'(t)$ 及 $y'(t)$ 存在连续且不全为 0，则 $C$ 称为**光滑曲线**(或光滑闭曲线).

**定义 1.10** 设连续弧 $AB$ 的参数方程为

$$z=z(t), \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

任取实数列 $\{t_n\}$：

$$\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta, \tag{1-29}$$

并且考虑 $AB$ 弧上对应的点列：$z_1,z_2,\cdots,z_n$，将它们用一折线 $Q_n$ 连接起来，$Q_n$ 的长度

$$I_n=\sum_{j=1}^{n} |z(t_j)-z(t_{j-1})|$$

如果对于所有的数列(1-29), $I_n$的上确界 $L=\mathrm{Sup}I_n$ 存在, 则 $AB$ 弧称为**可求长**的. $L$ 称为 $AB$ 弧的长度.

有限条光滑曲线衔接而成的曲线称为逐段光滑曲线. 逐段光滑曲线必是可求长曲线, 但简单曲线(或简单闭曲线)却不一定可求长.

**定理 1.1** (约当 Jordan 定理)任一简单闭曲线 $C$ 将 $z$ 平面唯一地分成 $C$、$I(C)$及 $E(C)$三个点集(图 1-5), 它们具有如下性质:

(1) 彼此不交;

(2) $I(C)$是有界域(称为 $C$ 的内部);

(3) $E(C)$是无界域(称为 $C$ 的外部);

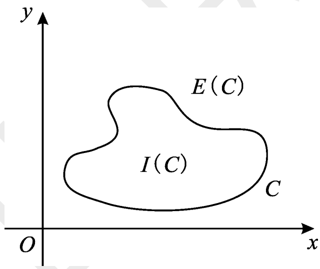


图 1-5

(4) 若简单折线 $P$ 的一个端点属于 $I(C)$, 另一端点属于 $E(C)$, 则 $P$ 必与 $C$ 有交点.

此定理的直观意义是很清楚的, 但定理的证明要用到拓扑学的知识, 因此略去证明.

**定义 1.11** 设 $D$ 为复平面上的一个区域. 若在 $D$ 内无论怎样画简单闭曲线, 其内部仍全含于 $D$, 则称 $D$ 为**单连通区域**; 非单连通区域称为**多连通区域**.

**例 1.5** 设 $E$ 是点集 $z=\dfrac{1}{m}+\mathrm{i}\dfrac{1}{n}$($m,n$ 是任意自然数)的集合, 它是一个无内点集; 它的每一个点都是边界点, 但都不是它的聚点; $E$ 不含有它的聚点(图 1-6).

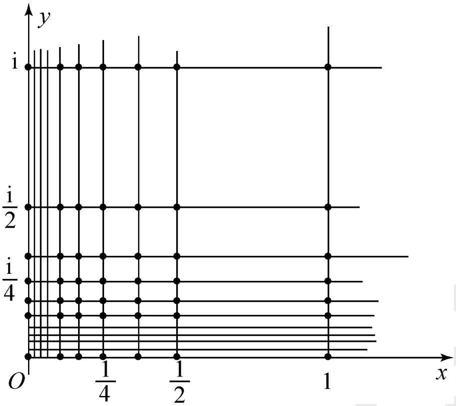



图 1-6

**例 1.6** 满足$|z-1|<1$及$|z+1|<1$的所有点 $z$ 和原点组成的集是连通集，但不是开集(原点不是它的内点). $|z-1|=1$及$|z+1|=1$和原点是这集合的边界(图 1-7).

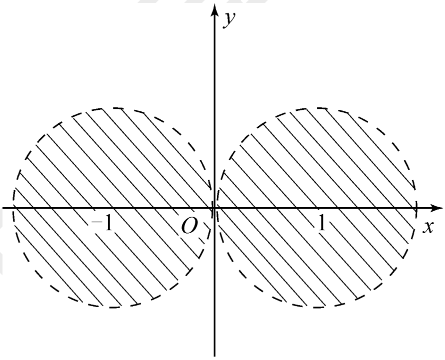



图 1-7

**例 1.7** 满足 $a < \operatorname{Im} z < b$ 的所有点 $z$ 组成的集为一带形域，它是一个无界区域，其边界为两直线：$\operatorname{Im} z = a, \operatorname{Im} z = b$ (图 1-8).

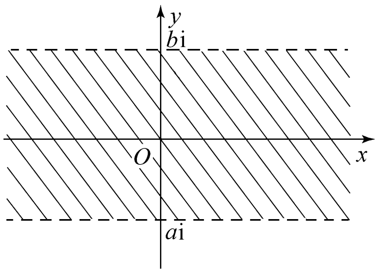



图 1-8

**例 1.8**　满足 $\theta_0 < \arg(z - z_0) < \alpha + \theta_0$ 的所有点 $z$ 组成的集为一个角形域，其边界为射线 $\arg(z - z_0) = \theta_0$ 及 $\arg(z - z_0) = \alpha + \theta_0$ (图 1-9).

**例 1.9**　满足 $\operatorname{Re} z > a$ 的所有点 $z$ 组成的集是半平面，它是一个单连通无界域，其边界是 $\operatorname{Re} z = a$ (图 1-10).

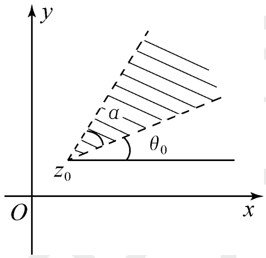



图 1-9

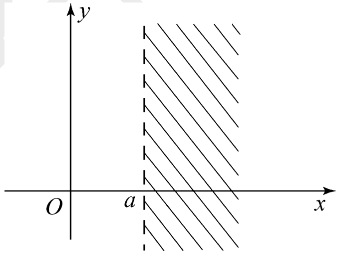



图 1-10

**例 1.10**　满足 $0 < |z + 1 + \mathrm{i}| < 2$ 的所有点 $z$ 组成的集是中心在 $-(1 + \mathrm{i})$，半径为 2 的圆的内部挖掉圆心 $-(1 + \mathrm{i})$ 所组成的区域，它是一个多连通的有界区域.

## § 1.3　复变函数

**定义 1.12**　设 $E$、$F$ 为两个非空复数集，若有一个法则 $f$，对每个复

数 $z \in E$，都有 $F$ 中确定的复数 $w$ 与之对应，则称 $f$ 为定义在 $E$ 上的复变函数；与 $z$ 对应的复数 $w$ 称为函数在 $z$ 的值，记为 $w = f(z)$，同时也用它表示定义在 $E$ 上的函数；$E$ 称为函数的定义域，$A = \{w \mid w = f(z), z \in E\} \subseteq F$ 称为函数的值域. $A$ 也记为 $f(E)$.

定义不排除

(1) 把 $E$ 中不同的点对应到 $F$ 中的同一个点 $w$，于是常数可看成是取同一值的函数;

(2) $E$ 中的每一点 $z$，只有 $F$ 中的一个 $w$ 与之对应，此时称 $f$ 为单值函数;

(3) 对 $E$ 中的一些点，在 $F$ 中有多个复数 $w$ 与之对应，此时称 $f$ 为多值函数(今后如无特殊说明，所讨论的函数均指单值函数);

(4) 对 $E$ 中任二复数 $z_1$，$z_2$，若 $z_1 \neq z_2$，则在 $F$ 中对应的二复数 $w_1 = f(z_1)$，$w_2 = f(z_2)$ 也成立 $w_1 \neq w_2$，此时称 $f$ 为单叶函数.

如果 $E$ 与 $A$ 分别在 $z$ 平面和 $w$ 平面的实轴上，那么 $w = f(z)$ 就是一个实变实值函数，因此实函数可以看成复变函数的一个特例.

一般情况下，考虑 $w = u + \mathrm{i}\upsilon$ 的实部和虚部，记 $\mathrm{Re}\, f(z) = u(x, y), \mathrm{Im}\, f(z) = \upsilon(x, y)$，则“函数 $w = f(z)$ 在 $E$ 上确定”，也就是“对 $E$ 中坐标为 $x$，$y$ 的每一点，确定了两个定义在 $E$ 上的函数 $u = u(x, y)$，$\upsilon = \upsilon(x, y)$”，于是一个复变数函数等价于两个实变函数.

**例 1.11** $w = z^2$，由 $z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i}(2xy)$，故有

$$u = x^2 - y^2, \quad \upsilon = 2xy.$$

**例 1.12** $w = z^2 + \bar{z}$，因

$$\begin{aligned} z^2 + \bar{z} &= (x + \mathrm{i}y)^2 + x - \mathrm{i}y \\ &= x^2 - y^2 + x + \mathrm{i}(2xy - y). \end{aligned}$$

故有 $u = x^2 - y^2 + x$，$\upsilon = 2xy - y$.

**例 1.13** 已知

$$f(z) = x\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) + \mathrm{i}y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

欲将它表示为关于 $z$ 的表达式，可如下进行：由

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z}),\quad x^2+y^2=|z|^2=z\bar{z},$$

得

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{z+\bar{z}}{2}\left(1+\frac{1}{z\bar{z}}\right)+\mathrm{i}\,\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\left(1-\frac{1}{z\bar{z}}\right)\\&=\frac{z+\bar{z}}{2}\left(1+\frac{1}{z\bar{z}}\right)+\frac{z-\bar{z}}{2}\left(1-\frac{1}{z\bar{z}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(z+\bar{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}+z-\bar{z}-\frac{1}{\bar{z}}+\frac{1}{z}\right)\\&=z+\frac{1}{z}.\end{aligned}$$

既然一个复变函数 $f(z)$等价于两个实函数$u(x,y)$, $\upsilon(x,y)$，而实函数已为人们所了解，那么为什么要将两个实函数结合成一个复变函数来研究呢？如果这两个实函数是任意挑选的，并且它们之间没有特殊的联系，那么把两个实函数合成复变函数去研究，就没有任何价值了．复变函数主要是研究那些$u(x,y)$与$\upsilon(x,y)$具有确定关系的一类函数，即解析函数.

复变函数既然可表示为

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\upsilon(x,y),$$

而 $x,y$ 又可用极坐标变量 $r$, $\theta$表示为 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$，故 $f(z)$又可表示为

$$f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}\upsilon(r,\theta).$$

例如,

$$\begin{aligned}w=f(z)=z^2&=x^2-y^2+\mathrm{i}2xy\\&=r^2\cos 2\theta+\mathrm{i}r^2\sin 2\theta.\end{aligned}$$

从而$u(r,\theta)=r^2\cos 2\theta$, $\upsilon(r,\theta)=r^2\sin 2\theta$.

关于复合函数、反函数及奇偶函数的定义，在形式上均与实函数情形相同，如反函数的定义是：

设 $w=f(z)$, $z\in E$, $w\in A$(值域)$\subset F$，若对 $A$ 中的每个 $w$，在 $E$

中都有确定的点与之对应，则在 $A$ 上确定了一个函数，记作 $z=f^{-1}(w)$，它就称为函数 $w=f(z)$ 的**反函数**.

由定义看出，对于任意的 $w\in A$，有

$$w=f[f^{-1}(w)],$$

且当函数及其反函数都是单值函数时，还有

$$z=f^{-1}[f(z)],\quad z\in E.$$

**例 1.14** 设 $f(z)$，$\varphi(z)$ 是偶函数，$g(z)$，$\psi(z)$ 是奇函数，证明若

$$f(z)+\mathrm{i}g(z)=\varphi(z)+\mathrm{i}\psi(z),$$

则

$$f(z)=\varphi(z),\quad g(z)=\psi(z). \tag{1-30}$$

**证** 因 $f(-z)=f(z)$，$\varphi(-z)=\varphi(z)$，而 $g(-z)=-g(z)$，$\psi(-z)=-\psi(z)$，故有

$$f(-z)+\mathrm{i}g(-z)=\varphi(-z)+\mathrm{i}\psi(-z),$$

即

$$f(z)-\mathrm{i}g(z)=\varphi(z)-\mathrm{i}\psi(z). \tag{1-31}$$

式 (1-30) 与式 (1-31) 的两边分别相加和相减，便分别得到 $f(z)=\varphi(z)$及$g(z)=\psi(z)$.

$w\in A=f(E)$ 可看成一个复平面($z$ 平面)到另一个复平面($w$平面)的映射，$A$ 称为象集，$E$ 称为原象集. 在两个复平面上，分别画出象集和原象集，便称它们为复变函数的图形(图 1-11).

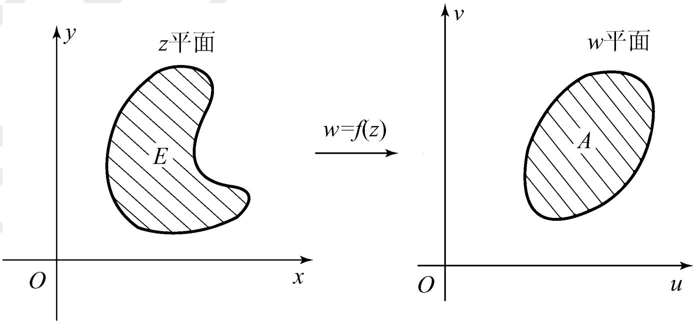



图 1–11

**例 1.15** 在映射 $w=\dfrac{1}{z}(z\neq 0)$ 下，$z$ 平面上的下列曲线各映射为 $w$ 平面上的什么曲线：

(1) $x^2+y^2=4$　　　　　　(2) $x$=1.

**解** 设 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u(x,y)+\mathrm{i}\upsilon(x,y)$，则

$$w=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2},$$

于是

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \upsilon=\frac{-y}{x_2+y^2}.$$

(1) $u^2+\upsilon^2=\dfrac{x^2+(-y)^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{4}$，即 $u^2+\upsilon^2=\dfrac{1}{4}$，于是在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下，$z$ 平面上的圆周 $x^2+y^2=4$，映射成 $w$ 平面上的圆周 $u^2+\upsilon^2=\dfrac{1}{4}$(图 1-12).

(2) 当 $x=1$ 时，$u=\dfrac{1}{1+y^2}$，$\upsilon=\dfrac{-y}{1+y^2}$，故 $u^2+\upsilon^2=\dfrac{1}{1+y^2}=u$，即 $(u-\dfrac{1}{2})^2+\upsilon^2=\dfrac{1}{4}$，于是在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下，$z$ 平面上的直线 $x=1$ 映射成 $w$ 平面上的圆周 $(u-\dfrac{1}{2})^2+\upsilon^2=\dfrac{1}{4}$(图 1-13).

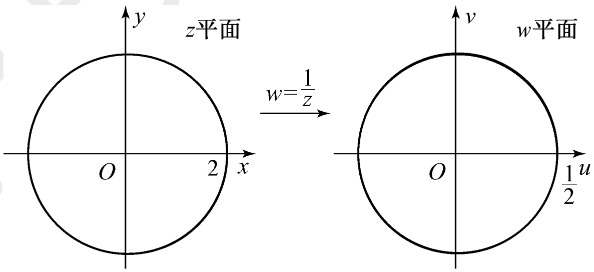



图 1-12

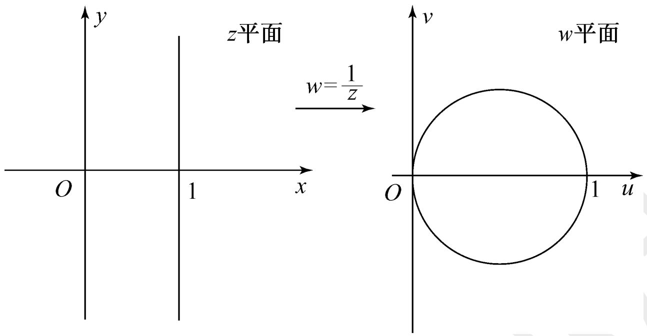



图 1-13

**例 1.16** 在映射 $w=z^2$ 下，$z$ 平面上的下列曲线各映成 $w$ 平面上的什么曲线：

(1) $|z|=2$， $0\leqslant\theta=\arg z\leqslant\dfrac{\pi}{2}$； (2) $x^2-y^2=4$.

**解** (1) 设 $z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$， $w=u+\mathrm{i}\upsilon=R(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，则 $R=r^2$， $\varphi=2\theta$. 由此，当 $z$ 的模为 2，辐角由 0 变到 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，对应的 $w$ 的模为 4，辐角由 0 变到π. 故在映射 $w=z^2$ 下，$z$ 平面上的圆弧映射成 $w$ 平面上以原点为中心，4 为半径，位于 $u$ 轴上方的半圆周（图 1-14）.

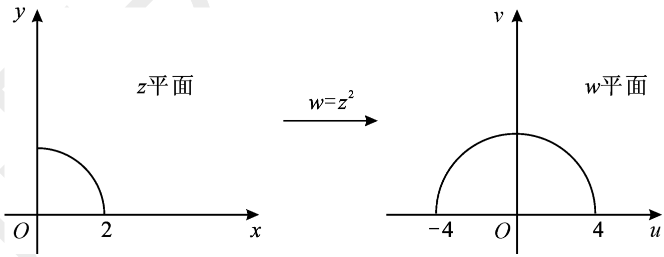



图 1-14

(2) 设 $z=x+\mathrm{i}y$， $w=u+\mathrm{i}\upsilon$，则 $u=x^2-y^2$， $\upsilon=2xy$. 于是 $z$ 平面上的双曲线 $x^2-y^2=4$ 映射成 $w$ 平面上的直线 $u=4$(图 1-15).

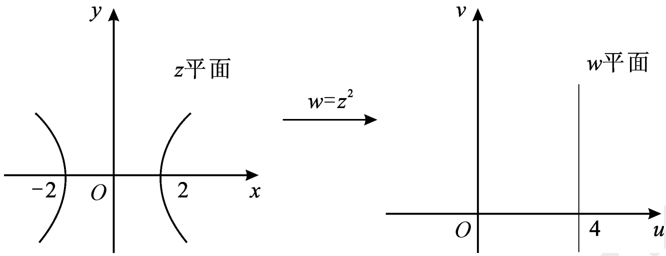



图 1−15

# § 1.4 复变函数的极限和连续性

## 1. 4. 1 复变函数的极限

先介绍复数列的极限. 按自然数编号的一列复数：$z_1, z_2, \ldots, z_n \ldots$, 称为复数列，记为$\{z_n\}$.

**定义 1.13** 给定复数列$\{z_n\}$, $A$为复常数，若对任意给定的$\varepsilon>0$，存在自然数 $N$，使得当 $n>N$ 时，恒有$|z_n - A|<\varepsilon$，则称 $A$ 为$\{z_n\}$当 $n$ 无限变大时的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A, \quad \text{或 } z_n \to A(n\to\infty). \tag{1-32}$$

由于这个定义与实数列的极限定义在形式上完全一致，于是凡在实数列情形下，不涉及大小关系的极限定理，只要证明这些定理时使用的关系式在复数情况也成立，那么就用同样方法证明这些定理在复数情形也是对的. 例如，实数列极限的四则定理的证明中只牵涉关系式

$$|a+b| \leqslant |a|+|b| \text{和} |ab| \leqslant |a||b|,$$

而这两个关系式在复数情况也成立，于是极限四则定理在复数列情形也对.

**定理 1.2** 复数列$\{z_n\}$有极限 $A$ 的充分必要条件是$\{\bar{z}_n\}$有极限$\bar{A}$.

其实，只要注意到

$$|z_n - A| = |\overline{z_n - A}| = |\bar{z}_n - \bar{A}|,$$

就很容易完成本定理的证明.

**定理 1.3** 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, $A = a + \mathrm{i}b$, $n = 1,2,\cdots$, 则 $\{z_n\}$ 有极限 $A$ 的充要条件是 $\{x_n\}$ 以 $a$ 为极限，同时 $\{y_n\}$ 以 $b$ 为极限.

**证** 先证必要性. 因

$$x_n = \frac{z_n + \bar{z}_n}{2}, \quad y_n = \frac{z_n - \bar{z}_n}{2\mathrm{i}},$$

故依定理 1.2 知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n + \bar{z}_n}{2} = \frac{A + \bar{A}}{2} = \operatorname{Re} A = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n - \bar{z}_n}{2\mathrm{i}} = \frac{A - \bar{A}}{2\mathrm{i}} = \operatorname{Im} A = b.$$

再证充分性. 其实，有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + \mathrm{i}y_n) = a + \mathrm{i}b = A, \quad 即 \quad \lim_{n\to\infty} z_n = A.$$

由定理 1.2 易证明下边的定理.

**定理 1.4** 任何有界复数列必有收敛子列.

**定理 1.5** 复数列 $\{z_n\}$ 有极限的充要条件是对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 $N$，当 $n>N$ 时，恒有 $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$ ( $p$=1, 2, …).

下边再介绍函数极限的概念及其命题.

**定义 1.14** 给定定义在集合 $E$ 上的函数 $w = f(z)$，$z_0$ 是 $E$ 的一个聚点，$A$ 是一个复常数；若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $z \in E$ 且 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(z) - A| < \varepsilon$，则称 $A$ 是 $z$ 趋于 $z_0$ 时 $f(z)$ 的极限，记为

$$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\in E}} f(z) = A \text{ 或 } f(z) \to A, \qquad (z \in E, z \to z_0). \tag{1-33}$$

在不引起混淆的情况下，上式中可省去“ $z \in E$ ”.

由于定义和实函数相应定义在形式上完全一致，于是实函数中凡不牵涉大小关系的极限定理，只要证明这些定理时使用的关系式在复

数情形也成立，那么相应的极限定理在复变函数情形也成立. 例如，由

$$|f(z)+g(z)|\leqslant|f(z)|+|g(z)|\text{及}|f(z)g(z)|=|f(z)||g(z)|,$$

使用定义 1.14，仿实变函数相应定理的证法便可得出如下的极限四则定理.

**定理 1.6** 若 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=A$，$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} g(z)=B$，则

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}}[f(z)\pm g(z)]=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)\pm\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} g(z)=A\pm B;$$

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)g(z)=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)\cdot\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} g(z)=A\cdot B;$$

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)}{\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} g(z)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0, g(z)\neq 0).$$

**定理 1.7** $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to z_0}\overline{f(z)}=\overline{A}$.

注意到 $|f(z)-A|=|\overline{f(z)-A}|=|\overline{f(z)}-\overline{A}|$，很容易完成定理的证明.

**定理 1.8** $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{z\to z_0}\operatorname{Re} f(z)=\operatorname{Re} A$, $\lim\limits_{z\to z_0}\operatorname{Im} f(z)=\operatorname{Im} A$.

该定理的证明与定理 1.2 的证明类似，这里不再重复.

### 1.4.2 复变函数的连续性

**定义 1.15** 设 $z_0$ 为集合 $E$ 的聚点且 $z_0\in E$，若 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=f(z_0)$，即对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $z\in E$ 且 $|z-z_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，则称 $f(z)$ 在 $z_0$ 点连续.

如果 $f(z)$ 在集合 $E$ 上每点都连续，则称 $f(z)$ 在 $E$ 连续. $f(z)$ 在区域 $D$ 的边界上某点 $z_0$ 连续，是指

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in E}} f(z) = f(z_0) .$$

如果函数在一点连续，那么当变量趋于该点时，函数必有极限，故平行于极限定理有：两连续函数的和、差、积、商都是连续函数(商的情况，使分母等于 0 的点除外)； $f(z)$ 连续时 $\overline{f(z)}$ 也连续，反之亦然； $f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 连续的充要条件是 $\mathrm{Re}\, f(z)$ 及 $\mathrm{Im}\, f(z)$ 都在点 $(x_0, y_0)$ 连续.

还可证明，若函数 $w = f(z)$ 在集合 $E$ 上连续，并且函数值的集合为 $F$，而在 $F$ 上，函数 $\zeta = \varphi(w)$ 连续，则复合函数 $\zeta = \varphi[f(z)] = F(z)$ 在集合 $E$ 上连续.

**定理 1.9** 设 $f(z)$ 在有界闭集 $E$ 上连续，则

(1) $f(z)$ 在 $E$ 上有界，即存在一个正数 $M$，对 $E$ 上的任何点 $z$，都有 $|f(z)| \leqslant M$；

(2) $|f(z)|$在 $E$ 上可以取到最大值和最小值，即存在 $z_1, z_2 \in E$，使

$$|f(z)| \leqslant |f(z_1)| \quad (z \in E),$$

$$|f(z)| \geqslant |f(z_2)| \quad (z \in E);$$

(3) $f(z)$ 在 $E$ 上一致连续，即对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使当 $|z_1 - z_2| < \delta$ 时的任意两点 $z_1, z_2 \in E$ 时，均有

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon .$$

**证** $|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + \upsilon^2(x,y)}$ $(f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\upsilon(x,y))$ 在有界闭集 $E$ 上连续，由实二元函数在有界闭集上的性质，即知(1)，(2)为真．由 $u(x,y)$ 及 $\upsilon(x,y)$ 的一致连续性也可推出(3)为真.

**例 1.17** 考查 $f(z) = z\,\mathrm{Re}\, z$ 的连续性.

**解** 因 $\mathrm{Re}\, f(z) = x^2$，$\mathrm{Im}\, f(z) = xy$ 在 $z$ 平面上处处连续，故 $f(z)$ 在 $z$ 平面上处处连续.

**例 1.18** 考查 $f(z) = \arg z$ 的连续性.

**解** 因原点的辐角无意义，故 $\arg z$ 在原点不连续．设

$z = x + \mathrm{i}y \neq 0$，则

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, y\text{为任意实数；} \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y \neq 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x} \pm \pi, & x < 0, y \neq 0; \\ \pi, & x < 0, y = 0. \end{cases} \tag{1-34}$$

于是当 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \neq 0$ 不是负实轴上的点时，和 $z_0$ 足够接近的点 $z$ 也不是原点和负实轴上的点，对这样的点 $z_0$，据式(1-34)有

$$\lim_{z \to z_0} \arg z = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \arctan\dfrac{y}{x}, & x_0 > 0; \\ \lim\limits_{\substack{x = 0 \\ y \to y_0}} \pm\dfrac{\pi}{2}, & x_0 = 0,\ y_0 \neq 0; \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \arctan\dfrac{y}{x} \pm \pi, & x_0 < 0,\ y_0 \neq 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \arctan\dfrac{y_0}{x_0}, & x_0 > 0; \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x_0 = 0,\ y_0 \neq 0; \\ \arctan\dfrac{y_0}{x_0} \pm \pi, & x_0 < 0,\ y_0 \neq 0. \end{cases}$$

$$= \arg z_0 .$$

当 $z_0$ 为负实轴上的点时，$z_0 = x_0\,(x_0 < 0)$，由式(1-34)，得

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0+0}} \arctan\frac{y}{x} + \pi = \pi,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0-0}} \arctan\frac{y}{x}-\pi=-\pi .$$

于是 $\lim\limits_{z\to z_0}\arg z$ 不存在.

综上所述知，除原点及负实轴上的点外，$\arg z$ 在 $z$ 平面上每点都连续.

**例 1-19** 考查函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 内的连续性和一致连续性.

**解** 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$f(z)=\frac{1}{1-x-\mathrm{i}y}=\frac{(1-x)+\mathrm{i}y}{[(1-x)-\mathrm{i}y][(1-x)+\mathrm{i}y]}$$
$$=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{y}{(1-x)^2+y^2},$$

因 $u=\dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$ 及 $\upsilon=\dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}$ 均在 $|z|<1$ 连续，故 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内连续.

下面证 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内不一致连续. 对 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，无论 $\delta$ 多么小，总可取 $z_1=1-\dfrac{1}{n}$ 与 $z_2=1-\dfrac{2}{n}$，虽有 $|z_1-z_2|=\dfrac{1}{n}<\delta$ (只要 $n>\dfrac{1}{\delta}$)，但

$$|f(z_1)-f(z_2)|=\frac{n}{2}>\varepsilon_0 .$$

故 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 内不一致连续.

## § 1.5 扩充复平面

### 1.5.1 球面投影

取定空间坐标系 $O$-$\xi\eta\zeta$ 作一球面

$$\xi^2+\eta^2+(\zeta-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \quad , \tag{1-35}$$

并作 $z$ 平面与 $O\xi\eta$ 重合(图 1-16). 用线段将 $N$ 与 $z$ 平面上一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 相连接交球面(1-35)上一点 $P$, 点 $P$ 称点 $z$ 在球面上的投影. 过点 $N(0, 0, 1)$, $P(\xi,\eta,\zeta)$和点$(x,y,0)$的直线为

$$\frac{\xi-0}{x-0}=\frac{\eta-0}{y-0}=\frac{\zeta-1}{0-1},$$

即

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}=\frac{\zeta-1}{-1}. \tag{1-36}$$

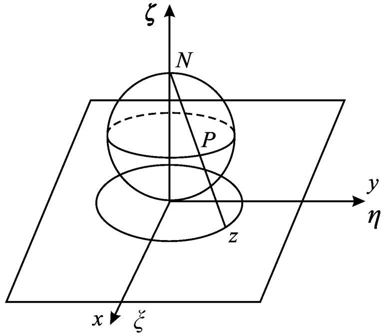



图 1-16

由式(1-36)知 $x=\dfrac{\xi}{1-\zeta}$, $y=\dfrac{\eta}{1-\zeta}$, 从而得

$$z=\frac{\xi}{1-\zeta}+\mathrm{i}\frac{\eta}{1-\zeta}. \tag{1-37}$$

由式(1-35)得 $\xi^2+\eta^2=\zeta(1-\zeta)$, 从而得

$$x^2+y^2=\frac{\zeta}{1-\zeta}. \tag{1-38}$$

因

$$1+x^2+y^2=1+\frac{\zeta}{1-\zeta}=\frac{1}{1-\zeta}=\frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta},$$

故有

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{1+x^2+y^2} = \dfrac{z+\bar{z}}{2(1+|z|^2)}; \\ \eta = \dfrac{y}{1+x^2+y^2} = \dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}(1+|z|^2)}; \\ \zeta = 1-\dfrac{1}{1+x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} = \dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}. \end{cases} \tag{1-39}$$

由式(1-37)和式(1-39)知 $z$ 平面上的点与球面上异于点 $N$ 的点成一一对应.

当 $|z|\to+\infty$ 时，由式(1-39)知，$\xi\to 0,\eta\to 0,\zeta\to 1$；而 $\zeta\to 1$ 时，由式(1-38)知，$|z|\to+\infty$．于是，球面上的点 $N$ 与 $z$ 平面上的模为无穷大的一个假想点相对应. 这个假想点称为**无穷远点**，并记为∞.

平面

$$A\xi+B\eta+C\zeta+D=0 \tag{1-40}$$

与球面(1-35)的交线是圆周，该圆周在 $z$ 平面上的投影为

$$Ax+By+C(x^2+y^2)+Ax+By+D=0, \tag{1-41}$$

当 $C+D=0$ 时, (1-41)为直线，当 $C+D\neq 0$ 时(1-41)为圆周.

以 $\xi=0,\eta=0,\zeta=1$ 代入式(1-40)得 $C+D=0$，故球面上的圆周过点 $N(0,0,1)$ 时，它在 $z$ 平面上的投影为直线，球面上的圆周不过点 $N(0,0,1)$ 时，它在 $z$ 平面上的投影为圆周.

## 1.5.2 扩充复平面

加入无穷远点∞的复球面称为**扩充复平面**，它对应的球面称**复球面**，复球面是扩充复平面一个几何模型.

在扩充复平面上对点∞作如下的规定：

(1) 点∞的模记为 $|\infty|=+\infty$；

(2) $a\neq\infty$ 时，$\dfrac{\infty}{a}=\infty$，$\dfrac{a}{\infty}=0$，$\infty\pm a=a\pm\infty=\infty$；

(3) $b\neq 0$ 时 $b\infty=\infty b=\infty$，$\dfrac{b}{0}=\infty$；

(4) 复平面上每条直线都过点∞，同时没有一个半平面包含点∞.

关于点∞的实部、虚部、辐角均无意义；运算$\infty\pm\infty$, $0\cdot\infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$也都无意义．在扩充复平面上，∞点的$\varepsilon$邻域$N_\varepsilon(\infty)$是指合于条件$|z|>\dfrac{1}{\varepsilon}$的点集合．用$N_\varepsilon(\infty)$可把聚点、内点和界点等概念推广到点∞，于是复平面以∞为唯一界点；扩充复平面以∞为内点，从而扩充复平面是唯一无界点的区域.

任一简单闭曲线 $C$ 将扩充复平面分为两个互不连接的区域，一个是有界区域 $I(C)$，另一个是无界区域 $E(C)$，它们都以 $C$ 为边界(约当定理).

单连通域的概念也可扩充到扩充复平面上的区域．设 $D$ 为扩充复平面上的区域，若 $D$ 内任一简单闭曲线，其内部或外部(包含点∞)仍含于 $D$，则称 $D$ 为扩充复平面上的单连通区域.

在扩充复平面上，点∞包含在函数的定义域内或为其聚点，函数值也可取到∞，因此，函数的极限与连续性概念可作如下的推广：

在关系式$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=A$中，如果$z_0$及 $A$ 有一个是∞或均为∞，就称 $A$ 为$f(z)$在$z\to z_0$时的广义极限．对广义极限的$\varepsilon-\delta$刻划，也要作相应的修改，如$z_0=\infty, A\neq\infty$时，$\varepsilon-\delta$刻划是：任意给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$|z|>\dfrac{1}{\delta}$，$z\in E$时，恒有$|f(z)-A|<\varepsilon$.

在关系式$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=f(z_0)$中，如果$z_0$及$f(z_0)$有一个是∞，称$f(z)$在$z_0$点广义连续．广义连续$\varepsilon-\delta$刻划也要作相应的修改．如$z_0=\infty, f(z_0)\neq\infty$时，$\varepsilon-\delta$刻划是：任意给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$|z|>\dfrac{1}{\delta}$，$z\in E$时，恒有$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$．又如$z_0\neq\infty$，$f(z_0)=\infty$时，$\varepsilon-\delta$刻划是：任意给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$|z-z_0|<\delta$，$z\in E$时，$|f(z)|>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

**例 1.20** 证明

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z}, & z\neq 0\text{且 } z\neq\infty;\\[2ex] \infty, & z=0;\\[2ex] 0, & z=\infty.\end{cases}$$

在扩充复平面上连续.

**证** 因

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}=\infty=f(0);$$

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0=f(\infty);$$

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{z}=\frac{1}{z_0}=f(z_0),\qquad (z\neq z_0,\quad z\neq\infty).$$

故 $f(z)$ 在扩充复平面上每点都连续.

以后，凡涉及扩充复平面时，都强调“扩充”二字，没加强调的场合，均指通常复平面；以后提到的区域的连通性，都限于通常复平面，提到的极限、连续等如不特殊声明，均按通常意义理解.

## § 1.6 习题

1. 求下列复数的实部、虚部、模及辐角.

(1) $z=\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$;  (2) $z=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}+\dfrac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}$.

2. 设 $z_1$、$z_2$ 是二复数，证明若 $z_1+z_2$，$z_1 z_2$ 都是实数，则 $z_1$ 和 $z_2$ 或者都是实数，或者是一对共轭复数.

3. 设 $z_1=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$，$z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$，试用指数形式表示 $z_1z_2$，$\dfrac{z_1}{z_2}$.

4. 若 $z_1$， $z_2$ 为二复数，试证 $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

5. 设 $z_1, z_2, z_3$ 三点适合条件：

$$z_1+z_2+z_3=0 \text{ 及} |z_1|=|z_2|=|z_3|=1.$$

试证明 $z_1, z_2, z_3$ 是一个内接于单位圆周 $|z|=1$ 的正三角形的顶点.

6. 证明 $z$ 平面上的直线方程可写成

$$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=c, \qquad (\alpha \text{ 是非零复常数，} c \text{ 是实常数}).$$

7. 证明 $z$ 平面上的圆周可写成

$$Az\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+C=0,$$

其中, $A$, $C$ 为实数, $A\neq0$, $\beta$为复常数且 $|\beta|^2>AC$.

8. 求下列方程所表示的曲线：

(1) $\operatorname{Re}(z+2)=-1$;　　(2) $\operatorname{Im} z=3$;

(3) $|z-2|+|z+2|=5$;　　(4) $\arg(z-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$;

(5) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|=2$;　　(6) $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$.

9. 满足下列条件的 $z$ 组成什么样的点集？如果是区域，那么它是单连通域还是多连通域？

(1) $|z-\mathrm{i}|\leqslant|2+\mathrm{i}|$;　　(2) $|z-2|-|z+2|>1$;

(3) $0<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}$, 且$2<\operatorname{Re} z<3$;　　(4) $|z|<1$，且 $\operatorname{Re} z>\dfrac{1}{2}$;

(5) $|z-2|+|z+2|>5$;

(6) $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$分别小于 1，大于 1，等于 1, $|a|<1$.

10. 判别下列命题的真伪：

(1) 若 $z$ 为纯虚数，则 $z\neq\bar{z}$;

(2) $\mathrm{i}\leqslant 2\mathrm{i}$;

(3) 零的辐角为 0;

(4) 仅存在一个复数 $z$，使 $\dfrac{1}{z}=-z$;

(5) $\frac{1}{\mathrm{i}}\bar{z}=\overline{\mathrm{i}z}$;

(6) $\operatorname{Arg}\frac{1}{z}=\operatorname{Arg} z$;

(7) $z\bar{z}=1$表示单位圆周;

(8) 由圆周的内部和外部及圆周上一点组成的点集是一个区域.

11. 设 $z=x+\mathrm{i}y$, , 求 $\frac{1}{z}$ 和 $\frac{z-1}{z+1}$ 的实部及虚部.

12. 在映射 $w=z^2$ 下，$z$ 平面上的下列曲线各映射成 $w$平面上的什么曲线？

(1) $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0<r<2$, $\theta=\frac{\pi}{4}$;

(2) $\operatorname{Re} z=C_1$ ($C_1$为实常数);

(3) $\operatorname{Im} z=C_2$ ($C_2$为实常数);

(4) 双曲线 $xy=a$ ($a$ 为实常数).

13. 设 $f(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z})$ $(z\neq 0)$ ,证明 $f(z)$ 在原点无极限.

14. 证有理分式函数

$$f(z)=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m},(a_0\neq 0,\quad b_0\neq 0)$$

在 $z$ 平面上除去分母等于零的点外都连续.

# 第二章　解析函数

解析函数是复变函数中的实、虚部具有特殊关系的一类函数，它具有许多很好的性质，是我们研究的主要对象．本章先介绍解析函数的一个充要条件，然后考察一些初等函数的解析性．

## § 2.1 解析函数的概念与柯西-黎曼条件

**定义 2.1** 给定在区域 $D$ 有定义的复变函数 $w=f(z)$，取 $D$ 中一点 $z$，任意取定 $\Delta z \neq 0$，且使 $z+\Delta z \in D$，得

$$\Delta f = \Delta w = f(z+\Delta z) - f(z),$$

若极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

为一个有限复数，则称此极限为函数 $f(z)$ 在点 $z$ 的**导数**，记为 $f'(z)$．即

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z). \tag{2-1}$$

用不等式描述，式(2-1)便是：任意给定 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |\Delta z| < \delta$ 且 $z, z+\Delta z \in D$ 时，恒有 $\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) \right| < \varepsilon$，这时称函数 $f(z)$ 在点 $z$ 可导．

这是一个构造性定义，它不但定义了导数而且构造出求导数的方法．定义中的“任意取定 $\Delta z \neq 0$ 且 $z+\Delta z \in D$”和“$\Delta z \to 0$”起着关键性的作用，由 $\Delta z \neq 0$，$z+\Delta z \in D$ 获得了比值 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$；再由 $\Delta z \to 0$ (因 $\Delta z$

是任意取定的，故 $\Delta z \to 0$ 的方式也是任意的)，求比 $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 的极限(而非极限的比)．$\Delta z$ 的这两大作用便完成了建立导数任务．导数建立后，它便消失了．我们不能只是有一种 $\Delta z$ 好象存在过而现在已经不存在了这样一种印象，而应深深地缅怀它在建立导数的过程中的功勋，才有益于今后对解析函数的研究.

若令 $\zeta = z + \Delta z$，则式(2-1)又可写成

$$\lim_{\zeta \to z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z) . \tag{2-2}$$

如果 $f(z)$ 在区域 $D$ 内每点都可导，那么便称 $f(z)$ 在区域 $D$ 可导.

设函数 $w = f(z)$ 在点 $z$ 可导，

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z),$$

于是，$\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \eta$,其中 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \eta = 0$，即

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \varepsilon ,$$

其中 $|\varepsilon| = |\eta \cdot \Delta z|$ 为比 $|\Delta z|$ 高阶的无穷小．称 $f'(z)\Delta z$ 为 $w = f(z)$ 在点 $z$ 的**微分**，记为 $\mathrm{d}w$ 或 $\mathrm{d}\, f(z)$，即

$$\mathrm{d}w = f'(z)\Delta z . \tag{2-3}$$

此时也称函数 $f(z)$ 在 $z$ **可微**.

特别当 $f(z) = z$ 时，得到 $\mathrm{d}z = \Delta z$，于是(2-3)变为

$$\mathrm{d}w = f'(z)\mathrm{d}z ,$$

即

$$f'(z) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} .$$

可见：$f(z)$ 在 $z$ 可导与 $f(z)$ 在 $z$ 可微是等价的.

显然，在区域 $D$ 上恒为常数的函数在 $D$ 内每点的导数都为 0.

**例 2.1** 设 $f(z) = z^n$ ($n$ 为自然数)，则

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} [C_n^1 z^{n-1} + C_n^2 z^{n-2} \Delta z + \cdots + C_n^n (\Delta z)^n] \\
&= C_n^1 z^{n-1} = n z^{n-1}.
\end{aligned}
$$

于是，$f(z) = z^n$ 在 $z$ 平面上可导.

**例 2.2** 证明函数 $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ 在 $z$ 平面每点都不可导.

**证** 对 $z$ 平面上任一点 $z = x + \mathrm{i}y$ 有

$$
\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\mathrm{Re}(z+\Delta z) - \mathrm{Re}\, z}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y},
$$

当 $\Delta z$ 取实数值趋于 0(即 $z + \Delta z$ 沿平行于实轴的方向趋向 $z$)时，$\frac{\Delta f}{\Delta z} \to 1$；当 $\Delta z$ 取纯虚数趋向 0(即 $z + \Delta z$ 沿平行于虚轴的方向趋向 $z$)时，$\frac{\Delta f}{\Delta z} \to 0$，这表明极限

$$
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}
$$

不存在，即 $\mathrm{Re}\, z$ 在点 $z$ 不可导，由 $z$ 的任意性，知 $\mathrm{Re}\, z$ 在 $z$ 平面上每点不可导. 显然 $\mathrm{Re}\, z$ 在 $z$ 平面每点都连续. 在复变函数中，处处连续处处不可微的函数几乎随手可得，而在实变函数中，要构造这样一个函数，是不容易办到的.

**定理 2.1** 若函数 $f(z)$ 在点 $z$ 可导，则 $f(z)$ 在点 $z$ 连续.

**证** 由于

$$
f(\zeta) - f(z) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}(\zeta - z),
$$

于是

$$
\lim_{\zeta \to z} [f(\zeta) - f(z)] = f'(z) \cdot 0 = 0,
$$

即

$$\lim_{\zeta \to z} f(\zeta) = f(z).$$

由例 2.2, 知该定理的逆定理不成立.

**定理 2.2** 设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\upsilon(x, y)$ 是定义在区域 $D$ 上的函数, 那么 $f(z)$ 在 $D$ 内一点 $z = x + \mathrm{i}y$ 可微的充要条件是：在点$(x,\ y)$, $u$ 及 $\upsilon$ 皆可微, 并且满足条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}, \end{cases} \tag{2-4}$$

其中，$u = u(x, y)$, $\quad \upsilon = \upsilon(x, y)$ .

**证** 先证必要性. 记 $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y$, $\Delta f = \Delta u + \mathrm{i}\Delta\upsilon$, $f'(z) = a + \mathrm{i}b$ , 因 $f(z)$ 在 $z \in D$ 可微, 故

$$\begin{aligned} \Delta f = \Delta u + \mathrm{i}\Delta\upsilon &= f'(z)\Delta z + \alpha\Delta z \\ &= (a + \mathrm{i}b)(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y) + \alpha\Delta z \\ &= (a\Delta x - b\Delta y) + \mathrm{i}(b\Delta x + a\Delta y) + \alpha\Delta z, \end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha \to 0$ , 比较上式的实部与虚部可得

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \mathrm{Re}(\alpha\Delta z), \\ \Delta\upsilon &= b\Delta x + a\Delta y + \mathrm{Im}(\alpha\Delta z). \end{aligned}$$

因 $\mathrm{Re}(\alpha\Delta z)$ 及 $\mathrm{Im}(\alpha\Delta z)$ 都是关于 $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 的高阶无穷小, 故 $u(x, y)$, $\upsilon(x, y)$ 在点$(x, y)$皆可微, 并且有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -b = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$$

再证充分性. 因 $u(x, y)$ 及 $\upsilon(x, y)$ 在$(x, y)$皆可微, 故有

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1,$$

$$\Delta\upsilon = \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\Delta y + \alpha_2.$$

其中，$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\alpha_1}{\rho}=0,\quad \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\alpha_2}{\rho}=0(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$，记 $a=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$b=\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}$，据式(2-4)有

$$\begin{aligned}\Delta f &= \Delta u+\mathrm{i}\Delta\upsilon\\ &=(a\Delta x-b\Delta y)+\mathrm{i}(b\Delta x+a\Delta y)+\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2\\ &=(a+\mathrm{i}b)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)+\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2 .\end{aligned}$$

两端同除以 $\Delta z$，得

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=a+\mathrm{i}b+\frac{\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2}{\Delta z}.$$

因

$$\left|\frac{\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2}{\Delta z}\right|=\frac{|\alpha_1|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\frac{|\alpha_2|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},$$

故

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2}{\Delta z}=0.$$

从而有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=a+\mathrm{i}b.$$

故 $f(z)$ 在点 $z=x+iy$ 可微.

式(2-4)称为**柯西-黎曼**(Cauchy-Riemann)**条件**，简称为 C-R 条件. 它反映了可微函数的实部与虚部有着特别的联系.

从定理 2.2 的证明中看出：在 $f(z)$ 可微时，有

$$\begin{aligned}f'(z)&=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\\ &=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}.\end{aligned}\tag{2-5}$$

由定理 2.2 还可断定，$u(x,y)$，$\upsilon(x,y)$ 至少有一个不可微，或 $u(x,y)$，$\upsilon(x,y)$ 不满足C-R条件时，$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\upsilon(x,y)$ 必不可微. 前边已证明研究复变函数的极限与连续性，等价于研究两个实二元函

数(函数的实部与虚部)的极限与连续性，但研究函数 $f(z)$ 的可微性，并不等价于研究实二元函数 $\mathrm{Re}\, f(z)$ 与 $\mathrm{Im}\, f(z)$ 的可微性，因此可微函数的概念，在复变函数的研究中，起着分水岭的作用.

还需注意："$u(x,y)$, $\upsilon(x,y)$ 可微"和"$u(x,y)$, $\upsilon(x,y)$ 满足 C-R 条件"二者是相互独立的，这可从下边的一些例子看出.

**例 2.3** $f(z)=\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，虽 $u=x,\upsilon=-y$ 处处可微，但由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial y}=-1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x}=0,$$

于是 $u,\upsilon$ 处处不满足 C-R 条件，故 $f(z)=\bar{z}$ 处处不可微.

**例 2.4** 设 $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z=x^2+\mathrm{i}xy$，$u=x^2,\upsilon=xy$ 处处可微，但由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial y}=x,$$

于是 $u,\upsilon$ 仅在点(0, 0)满足 C-R 条件，故 $f(z)=z\mathrm{Re}\,z$ 仅在点 $z=0$ 可微.

**例 2.5** 设 $f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}\,z^2|}=\sqrt{|2xy|}$，证明 $u=\sqrt{|2xy|}$, $\upsilon=0$ 在点(0, 0)满足 C-R 条件. 但在 $z=0$，$f(z)$ 不可微.

**证** 在点(0, 0)，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0,$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0,$$

这说明 $u,\upsilon$ 在点(0, 0)满足 C-R 条件. 但在 $z=0$，有

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|2\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y},$$

从而

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x=\Delta y}}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}},\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta f}{\Delta z}=0.$$

这说明在点 $z=0$，$f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}\,z^2|}$ 不可导. 实际上，容易证明，函数

$u(x, y)$ 在(0, 0)点不可微.

**定义 2.2** 若函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 的某一个邻域内可微，则称 $f(z)$ **在点 $z_0$ 解析**；若函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 的每点都解析，则称 $f(z)$ **在区域 $D$ 解析**.

由于区域的每点都是内点，于是函数在区域内解析与函数在区域内可微是等价的.

设 $\overline{D}$ 为闭区域，若存在区域 $G \supseteq \overline{D}$，使函数 $f(z)$ 在 $G$ 解析，则称 $f(z)$ **在 $\overline{D}$ 解析**.

函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 解析，它必在 $z_0$ 可微；但函数在点 $z_0$ 可微时，它在点 $z_0$ 却未必解析．如 $f(z) = z\operatorname{Re} z$ 仅在点 $z = 0$ 可微，故它在点 $z = 0$ 不解析．这样虽不能说 $f(z) = z\operatorname{Re} z$ 处处不可微，却可以说它处处不解析.

如果在区域 $D$ 内，除了可能有某些例外点外，函数 $f(z)$ 在 $D$ 内各点解析，则称这些例外点为 $f(z)$ 的**奇点**.

例如点 $z = 0$ 是函数 $\dfrac{1}{z}$ 的奇点；又如 $z = \mathrm{i}, z = -\mathrm{i}$ 都是函数 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 的奇点.

由定义 2.1，容易证明：若函数 $f(z), g(z)$ 皆在点 $z$ 可微，则 $f(z) \pm g(z), f(z)\cdot g(z)$ 和 $\dfrac{f(z)}{g(z)}\ (g(z) \neq 0)$ 也在 $z$ 可微，且

$$[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z), \tag{2-6}$$

$$[f(z)\cdot g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \tag{2-7}$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \tag{2-8}$$

由此可得

**定理 2.3** 若函数 $f(z), g(z)$ 皆在区域 $D$ 解析，则 $f(z) \pm g(z)$，$f(z)\cdot g(z)$，$\dfrac{f(z)}{g(z)}\ (g(z) \neq 0)$ 皆在区域 $D$ 内解析.

还易证明下边的定理.

**定理 2.4** 设 $\zeta = f(z)$ 在 $z$ 平面上的区域 $D$ 内解析，$w = F(\zeta)$ 在ζ平面上的区域 $D_1$ 解析，且 $z \in D$ 时，$\zeta = f(z) \in D_1$，则 $w = F[f(z)]$ 在 $D$ 内也解析，且

$$\frac{dF[f(z)]}{dz} = \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz}. \tag{2-9}$$

由定理 2.2 即可推出

**定理 2.5** 函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\upsilon(x, y)$ 在区域 $D$ 解析的充要条件是：$u(x, y)$ 与 $\upsilon(x, y)$ 在区域 $D$ 内皆可微且满足 C-R 条件.

**例 2.6** 设函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\upsilon(x, y)$ 在区域 $D$ 解析，证明若对 $D$ 内任意一点 $z$，都有 $f'(z) = 0$，则 $f(z)$ 在 $D$ 内必为常数.

**证** 对 $D$ 内任意一点 $z = x + \mathrm{i}y$，有

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

下面证明 $u, \upsilon$ 均为常数.

设 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 是 $D$ 内一定点，$z = x + \mathrm{i}y = x_0 + \Delta x + \mathrm{i}(y_0 + \Delta y)$ 是 $D$ 内任意一点，并且这两点能用全部位于 $D$ 内的直线段 $z_0 z$ 来连接，若令

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

则有

$$F(t) = u(x_0 + t\Delta x, \quad y_0 + t\Delta y),$$

$$F'(t) = u'_x(x_0 + t\Delta x, \quad y_0 + t\Delta y)\Delta x + u'_y(x_0 + t\Delta x, \quad y_0 + t\Delta y)\Delta y$$

因 $\dfrac{dx}{dt} = \Delta x, \quad \dfrac{dy}{dt} = \Delta y$，由微分中值定理

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \quad (0 < \theta < 1).$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta u &= F(1)-F(0)=u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)\\ &= u'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x+u'_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y\\ &= 0,\quad (0<\theta<1).\end{aligned}$$

即　$u(x,y)=u(x_0,y_0)=C_1$(常数),

同理，$\upsilon(x,y)=C_2$(常数).

若连接 $z_0, z$ 的直线段不全在 $D$ 内，由区域的连通性，可用全部在 $D$ 内的折线将 $z_0$ 与 $z$ 连接．若 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 是折线上 $z_0$ 后面的一个顶点，则在上边 $\Delta u$ 的表达式中，令

$$x_1=x_0+\Delta x,\quad y_1=y_0+\Delta y$$

立即得出 $u(x_1,y_1)=u(x_0,y_0)$．如此逐步计算，由一顶点至另一顶点，最后可得

$$u(x,y)=C_1\,(\text{常数}).$$

同理，$\upsilon(x,y)=C_2$(常数).

**例 2.7** 设函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 解析，若 $|f(z)|$ 在 $D$ 内恒为常数，则 $f(z)$ 在 $D$ 内恒为一常数.

**证**　设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\upsilon(x,y)$，$x+\mathrm{i}y=z\in D$．由于 $|f(z)|$=C(常数)，于是 $u^2+\upsilon^2=C,^2$ 从而

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=0,\quad u\frac{\partial u}{\partial y}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0,$$

又 $f(z)$ 在 $D$ 解析，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y},\quad -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

于是得到

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}=0;\\ -u\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\dfrac{\partial u}{\partial x}=0.\end{cases}$$

这是关于 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}$ 的齐次线性方程组，其系数行列式

$$\begin{vmatrix} u & \upsilon \\ \upsilon & -u \end{vmatrix} = -(u^2 + \upsilon^2).$$

若 $u^2 + \upsilon^2 = 0$，则 $u = 0, \upsilon = 0$，于是 $f(z)$ =0．若 $u^2 + \upsilon^2 \neq 0$，则上边方程组只有零解，即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = 0,$$

由 C-R 条件，可得 $\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$．据例 2.6 知 $f(z)$ 在 $D$ 内恒为一常数.

**例 2.8** 设函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析．证明若 $\overline{f(z)}$ 在 $D$ 解析，则 $f(z)$ 在 $D$ 为一常数.

**证** 因 $f(z) = u + \mathrm{i}\upsilon$ 与 $\overline{f(z)} = u - \mathrm{i}\upsilon$ 在 $D$ 均解析，故有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-\upsilon)}{\partial y}, \quad -\frac{\partial(-\upsilon)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

由此得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

从而可知，$u$ =$C_1$(常数)，$\upsilon$ =$C_2$(常数)，于是

$$f(z) = u + \mathrm{i}\upsilon = C_1 + \mathrm{i}C_2 = C, \quad z \in D.$$

**例 2.9** 证明：$f(z)$ 在上半平面解析的充要条件是 $\overline{f(\bar{z})}$ 于下半平面解析.

**证** 必要性．设 $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$，在下半平面内任取一点 $z_0$，而 $z$ 是下半平面内异于点 $z_0$ 的点．因

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}}{z - z_0},$$

而 $\bar{z}_0, \bar{z}$ 在上半平面内，故 $F'(z_0)=\overline{f'(\bar{z}_0)}$．从而 $F(z)$ 在下半平面解析.

充分性．已知 $\overline{f(\bar{z})}$ 在下半平面内解析，由已证得的结果，知 $\overline{\overline{f(\bar{\bar{z}})}}=f(z)$ 在上半平面解析.

例 2.8 说明当 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 都在区域 $D$ 解析时，$f(z)$ 在 $D$ 必恒为一常数．从而断定：当 $f(z)$ 在 $D$ 不为常数时，$f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 不能同时在 $D$ 解析．例 2.9 说明当 $f(z)$ 解析时，不管 $f(z)$ 是否为常数，$\overline{f(\bar{z})}$ 必解析，反之亦然．据此还可推出，当 $f(\bar{z})$ 解析时，$\overline{f(\bar{\bar{z}})}=\overline{f(z)}$ 必解析，反之亦然.

# §2.2 初等函数

## 2.2.1 指数函数

对于复变数 $z=x+\mathrm{i}y$，定义指数函数为

$$w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)\,. \tag{2-10}$$

在式(2-10)中，令 $x$=0，便得欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y\,.$$

指数函数具有如下性质：

(1) 对任何复数 $z$，$\mathrm{e}^z\neq 0$，其实，由式(2-10)知 $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x>0$.

(2) $z$ 为任何实数 $x$ 时，$w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x$．其实，在式(2-10)中令 $y$=0，便得 $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x$.

(3) $\mathrm{e}^{-z}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^z}$．其实

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-z}&=\mathrm{e}^{-x-\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^{-x}[\cos(-y)+\mathrm{i}\sin(-y)]\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^x}(\cos y-\mathrm{i}\sin y)\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^x}\frac{1}{\cos y+\mathrm{i}\sin y}\quad=\frac{1}{\mathrm{e}^z}.\end{aligned}$$

(4) 对任何复数 $z_1$ 及 $z_2$，有

$$\mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}. \tag{2-11}$$

其实，记 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$， $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，则

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} &= \mathrm{e}^{x_1+\mathrm{i}y_1} \cdot \mathrm{e}^{x_2+\mathrm{i}y_2} \\
&= \mathrm{e}^{x_1}(\cos y_1 + \mathrm{i}\sin y_1) \cdot \mathrm{e}^{x_2}(\cos y_2 + \mathrm{i}\sin y_2) \\
&= \mathrm{e}^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2) + \mathrm{i}\sin(y_1+y_2)] \\
&= \mathrm{e}^{z_1+z_2}.
\end{aligned}$$

(5) 对任何复数 $z_1$ 及 $z_2$，有

$$\frac{\mathrm{e}^{z_1}}{\mathrm{e}^{z_2}} = \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{-z_2} = \mathrm{e}^{z_1-z_2}. \tag{2-12}$$

(6) 对任何复数 $z$， $\mathrm{e}^{z+\gamma} = \mathrm{e}^z$ 的充要条件是： $\gamma = 2k\pi\mathrm{i}$，其中 $k$ 为任一个整数. 其实. 若 $\mathrm{e}^{z+\gamma} = \mathrm{e}^z$，则 $\mathrm{e}^{\gamma} = 1$，令 $\gamma = \alpha + \mathrm{i}\beta$，有

$$\mathrm{e}^{\alpha}(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) = 1.$$

于是 $\mathrm{e}^{\alpha} = 1$， $\beta = 2k\pi$ ($k$ 为任一整数)，从而， $\alpha = 0, \beta = 2k\pi$ . 又若令 $z = x + \mathrm{i}y$，则对任一整数 $k$，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} &= \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}(y+2k\pi)} \\
&= \mathrm{e}^x[\cos(y+2k\pi) + \mathrm{i}\sin(y+2k\pi)] \\
&= \mathrm{e}^x[\cos y + \mathrm{i}\sin y] \\
&= \mathrm{e}^z.
\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{e}^{z+2k\pi i} = \mathrm{e}^z. \tag{2-13}$$

(7) $w = \mathrm{e}^z$ 在整个 $z$ 平面上解析，且有

$$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z. \tag{2-14}$$

其实，设 $z = x + \mathrm{i}y$ 是 $z$ 平面上任意一点，记 $\mathrm{e}^z = u + \mathrm{i}\upsilon$，则有

$$u = \mathrm{e}^x\cos y, \quad \upsilon = \mathrm{e}^x\sin y.$$

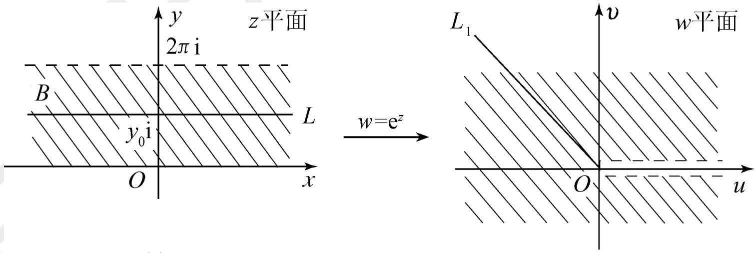
$u, \upsilon$ 在点$(x, y)$满足 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \sin y = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}.$$

又 $u, \upsilon$ 的一阶偏导数在点$(x, y)$都连续，故 $u, \upsilon$ 在点$(x, y)$都可微，即 $\mathrm{e}^z$ 在点 $z = x + \mathrm{i}y$ 可微．由 $z$ 的任意性，知 $\mathrm{e}^z$ 在 $z$ 平面上可微，从而在 $z$ 平面上解析．又在点 $z = x + \mathrm{i}y$，有

$$(\mathrm{e}^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = \mathrm{e}^z.$$

由于 $w = \mathrm{e}^z$ 有周期 $2k\pi\mathrm{i}$，于是可研究 $z$ 在 $0 < \mathrm{Im}\, z < 2\pi$ 的带形域 $B$ 中变化时，$w = \mathrm{e}^z$ 的映射性质．设 $u = \mathrm{Re}\, w$，$\upsilon = \mathrm{Im}\, w$，则当 $z$ 从左向右描出一条直线 $L$：$\mathrm{Im}\, z = y_0$ 时，$w = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y_0}$，于是$|w|$从 0(不包括 0)增加到$+\infty$，而 $\mathrm{Arg}w = y_0$ 保持不变．因此 $w$ 描出射线 $L_1$：$\mathrm{Arg}w = y_0$(不包括 $w$=0)．这样 $L$ 与 $L_1$ 上的点成一一对应．让 $y_0$ 从 0(不包括 0)增加到 2π(不包括 2π)，那么直线 $L$ 扫过 $B$(图2-1a)，而相应的射线 $L_1$ 按逆时针方向从 $w$ 平面的正实轴(不包括正实轴)变到正实轴(不包括正实轴)(图2-1b)，由此可见，$w = \mathrm{e}^z$ 把带形域 $B$ 映射到 $w$ 平面上除去原点和正实轴的区域．




(a)　　　　　　(b)

图 2-1

用同样的方法可知，函数 $w = \mathrm{e}^z$ 把带形域 $B_\alpha$：$\alpha < \mathrm{Im}\, z < \alpha + 2\pi$ ($\alpha$ 是任意实数)映射成 $w$ 平面上去掉原点和射线 $\arg w = \alpha$ 的区域．

### 2.2.2 三角函数

对任何复数 $z$，我们定义**正弦，余弦**函数如下：

$$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})\quad ,\tag{2-15}$$

$$\cos z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})\quad .\tag{2-16}$$

正弦、余弦函数具有如下性质.

(1) 对任何复数 $z$，欧拉公式成立：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z\quad .\tag{2-17}$$

其实，$\cos z+\mathrm{i}\sin z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$.

(2) $\sin z$、$\cos z$ 都是周期函数，周期为 $2\pi$. 其实，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$ 都有周期 $2\pi\mathrm{i}$.

(3) $\sin z$ 是奇函数，$\cos z$ 是偶函数. 其实，由式(2-15)及式(2-16)知，

$$\sin(-z)=-\sin z,\quad \cos(-z)=\cos z\,.$$

(4)
$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2\,,\tag{2-18}$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2-\cos z_1\sin z_2\,.\tag{2-19}$$

其实

$$\begin{aligned}&\cos(z_1+z_2)+\mathrm{i}\sin(z_1+z_2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2}=(\cos z_1+\mathrm{i}\sin z_1)(\cos z_2+\mathrm{i}\sin z_2)\\&=(\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2)+\mathrm{i}(\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2).\end{aligned}$$

由例 1.14 知式(2.18)与式(2.19)均真.

(5) $\cos^2 z+\sin^2 z=1$. 其实，由 $\cos(z-z)=\cos z\cos(-z)\ -\sin z$ $\sin(-z)$，即

$$\cos^2 z+\sin^2 z=\cos 0=1.\tag{2-20}$$

(6) 当且仅当 $z=k\pi$时，$\sin z=0$；当且仅当 $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时，$\cos z=0$，其中 $k$ 是任意整数. 其实，

$$\sin z=0 \Leftrightarrow e^{iz}=e^{-iz} \Leftrightarrow iz=-iz+2k\pi i \Leftrightarrow z=k\pi .$$

对余弦函数，可以同样证明.

(7) $\sin z$，$\cos z$ 都在 $z$ 平面上解析. 并且有

$$(\sin z)'=\cos z , \tag{2-21}$$

$$(\cos z)'=-\sin z , \tag{2-22}$$

其中 $z$ 是 $z$ 平面上任一点. 其实,

$$\begin{aligned}(\sin z)'&=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})'=\frac{1}{2i}(ie^{iz}+ie^{-iz})\\&=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z,\end{aligned}$$

对余弦函数，可同样证明.

(8) 在复数域内不能再断言 $|\sin z|\leqslant 1$，$|\cos z|\leqslant 1$. 例如 取 $z=iy$ $(y>0)$，则

$$\cos(iy)=\frac{e^{i(iy)}+e^{-i(iy)}}{2}=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}>\frac{e^{y}}{2}.$$

只要 $y$ 充分大，$\cos iy$ 就可大于任一预先给定的正数.

用 $\sin z$，$\cos z$ 可定义其它三角函数：

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z},$$

分别称为**正切**、**余切**、**正割**及**余割**函数. 这四个函数都在 $z$ 平面上使分母不为零的点处解析，且

$$(\tan z)'=\sec^2 z,\quad (\cot z)'=-\csc^2 z,$$

$$(\sec z)'=\sec z\tan z,\quad (\csc z)'=-\csc z\cot z.$$

正切、余切的周期为π，正割、余割的周期为 2π.

通常称

$$\sinh z=-i\sin iz=\frac{-i}{2i}(e^{i(iz)}-e^{-i(iz)})=\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}), \tag{2-23}$$

$$\cosh z = \cos(\mathrm{i}z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}), \tag{2-24}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

为**双曲正弦、双曲余弦**和**双曲正切**函数，显然有

$$\sinh(-z) = -\sinh z,$$

$$\cosh(-z) = \cosh z,$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2.$$

又设 $z = x + iy$, 则有

$$\sin z = \sinh x \cos y + \mathrm{i} \sinh y \cos x,$$

$$\cos z = \cosh y \cos x - \mathrm{i} \sinh y \sin x.$$

### 2.2.3 对数函数

若 $z = \mathrm{e}^{w}$ ( $w \neq 0, \infty$ )，则称复数 $w$ 为复数 $z$ 的对数，记为 $w = \mathrm{Ln}\, z$ .

令 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$， $w = u + \mathrm{i}\upsilon$，则

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{u+\mathrm{i}\upsilon} = \mathrm{e}^{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\upsilon},$$

从而

$$r = \mathrm{e}^{u}, \quad \upsilon = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \cdots.$$

故

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi), \qquad k = 0, \pm 1, \cdots,$$

或

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi \mathrm{i}, \quad k = 0, \pm 1, \cdots.$$

记 $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$，其中 argz 表示 Argz 的某个特定值，于是 $\ln z$ 表示 Lnz 的某个特定值. 从而 Lnz 又可表为

$$\mathrm{Ln}z = \ln z + 2k\pi \mathrm{i}, \quad k = 0, \pm 1, \cdots. \tag{2-25}$$

由此可见，Lnz 是无穷多值函数，其中任意两个相异值之差为 $2\pi$ 的整数倍.

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z\,(-\pi < \arg z \leqslant \pi) \tag{2-26}$$

称为 Lnz 的**主值**.

**例 2.10**

$$\begin{aligned}\ln(1+\mathrm{i}) &= \ln|1+\mathrm{i}| + \mathrm{i}\arg(1+\mathrm{i}) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

如果 $z$ 为负实数 $x$，那么

$$\mathrm{Ln}z = \ln|x| + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi),\quad k = 0, \pm 1, \cdots.$$

设二复数 $z_1, z_2 \neq 0, \infty$，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z_1 z_2) &= \ln|z_1 z_2| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) \\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\,z_2 \\ &= \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} &= \ln|z_1| - \ln|z_2| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{i}\mathrm{Arg}\,z_2 \\ &= \mathrm{Ln}\,z_1 - \mathrm{Ln}\,z_2\end{aligned}$$

为了分出 $w = \mathrm{Ln}\,z$ 的单值解析分支，应考察 $z = \mathrm{e}^w$ 的映射性质及其单叶性区域. 令 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$， $w = u + \mathrm{i}\upsilon$，则有 $r = \mathrm{e}^u$， $\theta = \upsilon$，据此，映射 $z = \mathrm{e}^w$ 把直线 $\upsilon = \upsilon_0$ 映射成自原点出发的射线 $\theta = \upsilon_0$，把线段 “$u = u_0$ 且 $-\pi < \upsilon \leqslant \pi$” 映射成圆周 $\Gamma$： $r = \mathrm{e}^{u_0}$ (图 2-2).

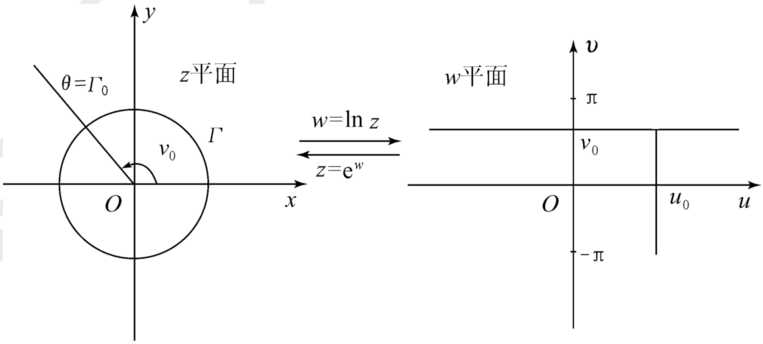



图 2-2

当 $w$ 平面上的动直线从直线 $\upsilon=0$ 扫动至直线 $\upsilon=\upsilon_0$ 时，在映射 $z=\mathrm{e}^w$ 下的像在 $z$ 平面上自射线 $\theta=0$ 扫动至 $\theta=\upsilon_0$，从而 $w$ 平面上的带形域 $0<\upsilon<\upsilon_0$ 映射成 $z$ 平面上的角形域 $0<\theta<\upsilon_0$.

特别地，$z=\mathrm{e}^w$ 把 $w$ 平面上的带形域 $-\pi<\upsilon<\pi$，映射成 $z$ 平面上的去掉原点及负实轴的区域.

一般映射 $z=\mathrm{e}^w$ 把 $w$ 平面上的宽为 2π的带形域

$$B_k:\ (2k-1)\pi<\upsilon\leqslant(2k+1)\pi\ ,\quad (k=0,\pm1,\cdots)\ , \tag{2-27}$$

都映射为 $z$ 平面上去掉原点和负实轴的区域 $G$(图 2-3).

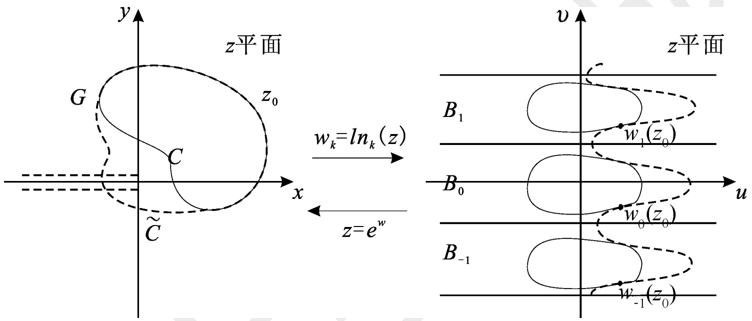



图 2-3

显然, $B_k$: 是 $z=\mathrm{e}^w$ 的单叶性区域的一种分法. 式(2-27)的这些带形域互不相交而填满(加上同一端的边界)$w$ 平面.

$w=\mathrm{Ln}\,z$ 出现多值性的原因是由于 $z$ 取定之后，其辐角并不唯一确定(可相差 2π的整倍数).

如果在 $z$ 平面上自原点到点∞引一射线，将 $z$ 平面割破，割破了的 $z$ 平面构成一个以割线为边界的区域，记此区域为 $G$(也用 $G$ 表示其子域)，在 $G$ 内任意取定一点 $z_0$，并指定 $z_0$ 的一个辐角值，则在 $G$` 内的每点 $z$，皆可由 $z_0$ 的辐角依连续变化而唯一确定 $z$ 的辐角.

假定从原点割破负实轴，$C$ 是 $G$ 内任一简单闭曲线，$C$ 不会穿过负实轴，它的内部不包含原点 $z$ =0，当变点 $z$ 从 $z_0$ 绕 $C$ 一周后，这时 $\arg z$ 又回到起点的辐角 $\arg z_0$，而 $z$ 的象点：

$$w_k = w_k(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k = 0, \pm 1, \cdots$$

画出一条闭曲线 $\Gamma_k$ (包含在 $B_k$ 内)而回到原来的位置 $w_k(z_0)$ (图 2-3).

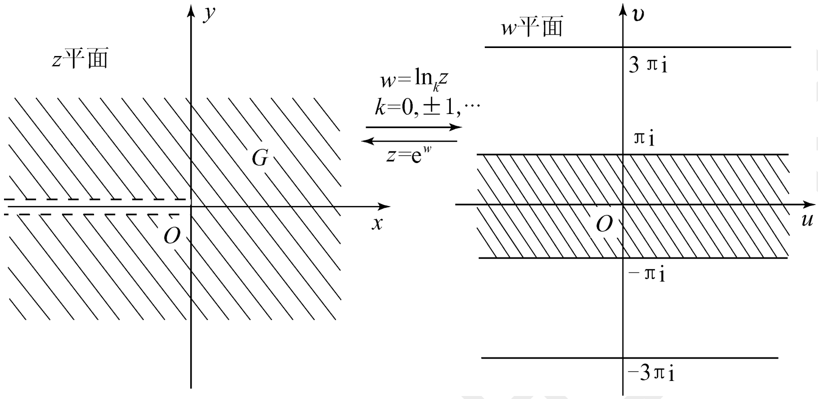



图 2-4

因此，在 $G$ 内可得到 $\operatorname{Ln} z$ 的无穷多个单值连续分支函数

$$w_k = \ln_k z = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi), \ k = 0, \pm 1, \cdots,$$

取 $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 中一个确定的 $k$，则对 $G$ 内任一点 $z$，有

$$(\ln_k z)' = \lim_{\zeta \to z} \frac{\ln_k \zeta - \ln_k z}{\zeta - z} \qquad (w = \ln_k \zeta, w_k = \ln_k z)$$

$$= \lim_{w \to w_k} \frac{w - w_k}{\mathrm{e}^w - \mathrm{e}^{w_k}} = \lim_{w \to w_k} \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^w - \mathrm{e}^{w_k}}{w - w_k}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}^{w_k}} = \frac{1}{z}.$$

故 $\operatorname{Ln} z$ 在 $G$ 内可分出无穷多个解析分支.

如不割破 $z$ 平面，则变点 $z$ 可沿一条包含原点在其内部的简单闭曲线 $\tilde{C}$ 变动，设 $z_0$ 是 $\tilde{C}$ 上一点，这时 $\tilde{C}$ 穿过负实轴，于是 $z$ 自 $z_0$ 出发循正(负)方向绕 $\tilde{C}$ 一周后，$z_0$ 的辐角已增(减)了 $2\pi$，$z$ 的象点 $w_k = \ln_k z$ 就沿图 2-3 虚线路径从一支到另一支，这样在包含原点的区域内，就不能把

$w = \ln z$ 分成独立的解析分支.

若变点 $z$ 绕定点 $z^*$ 一周回到原位置时，多值函数的函数值与原来的函数值相异，即多值函数从某一值变到另一支，则称 $z^*$ 为多值函数的**支点**.

$w = \mathrm{Ln}\, z$ 除在 $z=0$, $z=\infty$ 两点具有上述性质外，其它点都不具有上述性质，因此 $\mathrm{Ln}\, z$ 以 $z=0$, $z=\infty$ 为支点.

用以连接支点的曲线称为支割线，用支割线割破 $z$ 平面所得的区域内，可把多值函数 $\mathrm{Ln}\, z$ 分为解析分支.

## 2.2.4 一般幂函数与一般指数函数

1. 一般幂函数

$$w = z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln}\, z} \quad (z \neq 0, \infty),\ \alpha \text{ 为复常数},$$

称为 z 的**一般幂函数**.

当 $\alpha$ 为整数时，

$$w = z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha(\ln z + 2k\pi\, \mathrm{i})} \qquad (\alpha, k \text{ 为整数})$$

是单值函数.

当 $\alpha$ 为有理数 $\dfrac{m}{n}$(既约分数)时，

$$\begin{aligned} w = z^{\alpha} &= \mathrm{e}^{\frac{m}{n}\ln|z| + \mathrm{i}\frac{m}{n}(\arg z + 2k\pi)} \\ &= \sqrt[n]{|z|^m}\left[\cos\frac{m(\arg z + 2k\pi)}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{m(\arg z + 2k\pi)}{n}\right], \\ &\quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1), \end{aligned}$$

是 $n$ 值函数.

当 $\alpha$ 为无理数或虚数时

$$w = z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha(\ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\, \mathrm{i})},\ k = 0, \pm 1, \cdots,$$

对任意两相异整数 $k_1, k_2$，必有

$$\mathrm{e}^{2\alpha k_1 \pi\, \mathrm{i}} \neq \mathrm{e}^{2\alpha k_2 \pi\, \mathrm{i}}.$$

因若 $\mathrm{e}^{2\alpha k_1 \pi\, \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\alpha k_2 \pi\, \mathrm{i}}$，则有

$$2k_1\alpha\pi\,\mathrm{i}=2k_2\alpha\pi\,\mathrm{i}+2k\pi\,\mathrm{i}\quad (k\text{ 为整数}),$$

从而

$$\alpha=\frac{k}{k_1-k_2}$$

为有理数，与$\alpha$的假设矛盾，于是 $w=z^{\alpha}$ 是无穷多值函数.

$z^{\alpha}$ 分成单值解析分支的方法与 Ln $z$ 相同，且 $z^{\alpha}$ 仍只以 $z$=0, $z$=∞为支点，从原点起沿负实轴割破 $z$ 平面得到区域 $G$，在 $G$ 内可得 $z^{\alpha}$ 的单值连续分支，对 $z^{\alpha}$ 每一个单值连续分支仍记为 $z^{\alpha}$，则这分支在 $G$ 内任一点 $z$ 的导数为

$$(z^{\alpha})'=(\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}\,z})'=\alpha\frac{1}{z}\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}\,z}=\alpha z^{\alpha-1}.$$

下边考察 $z=w^n$ ($n$ 为自然数, $n$>1)的映射性质.

令 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，由 $z=w^n$ 得 $\theta=n\varphi,r=\rho^n$，据此知映射把自原点出发的射线 $\varphi=\varphi_0$ 映射成自原点出发的射线 $\theta=n\varphi_0$，并把圆周 $\rho=\rho_0$ 映射成圆周 $r=\rho_0^n$ (图 2-5).

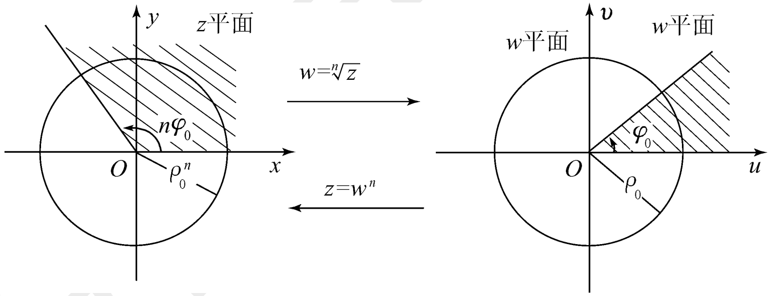



图 2-5

当 $w$ 平面上的射线自 $\varphi=0$ 扫动到射线 $\varphi=\varphi_0$ 时，在映射 $z=w^n$ 下的像，就在 $z$ 平面上自射线$\theta$ =0 扫动射线 $\theta=n\varphi_0$. 从而 $w$ 平面上的角形域 $0<\varphi<\varphi_0$，就映射成 $z$ 平面上的角形域 $0<\theta<n\varphi_0$ (图 2-5). 特别地，映射 $z=w^n$ 把 $w$ 平面上的角形域 $-\frac{\pi}{n}<\varphi<\frac{\pi}{n}$，映射成 $z$ 平面上除去原点和负实轴的区域(图 2-6).

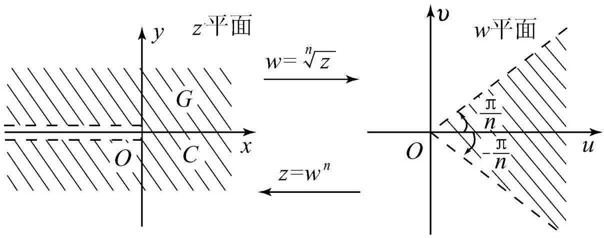



图 2−6

一般，映射 $z = w^n$ 把每个顶点在原点张角为 $\dfrac{2\pi}{n}$ 的角形域

$$T_k:\left(\frac{2k\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\right)<\varphi<\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right), k=0,\pm1,\cdots, \tag{2-28}$$

都映射成 $z$ 平面上去掉原点和负实轴的区域 $G$(图 2-6 是 $k$=0 的情形).

显然 $z = w^n$ 在式(2-28)的每个取定 $k$ 的角形域内单叶，实际上，任意取定 $k$ 后，对 $T_k$ 内任一点 $w_1$, 满足

$$|w_1|=|w_2|, \arg w_2 = \arg w_1 + \frac{2k\pi}{n}$$

的 $w_2 \overline{\in} T_k$，于是 $w_1, w_2 \in T_k$，且 $w_1 \neq w_2$，则 $z_1 = w_1^n \neq z_2 = w_2^n$ .

式（2-28）的这些角形域互不相交而填满（都加上同一端边界）$w$ 平面. 图 2-7 是 $n=3$ 的情形.

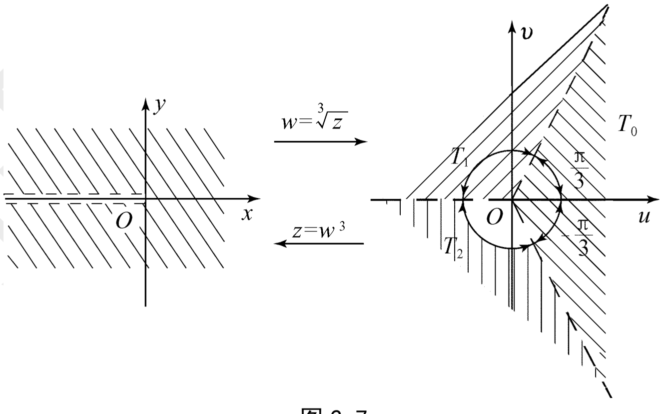



图 2−7

2．一般指数函数

$$w = a^z = \mathrm{e}^{z\mathrm{Ln}a}\ (z \neq 0\ ,\ \infty,),\quad a \text{ 为复常数,}$$

称为**一般指数函数**，它是无穷多个独立的在 $z$ 平面上单值解析的函数，当 $a = \mathrm{e}$ 时，$\mathrm{Ln}\, z$ 取主值时，便得通常的单值解析函数 $\mathrm{e}^z$.

对 $a^z$ 的每个单值连续分支（仍记为 $a^z$），有

$$(a^z)' = (\mathrm{e}^{z\ln a})' = a^z \ln a .$$

注意当求 $\beta^\alpha$ ($\alpha, \beta$为复常数)时，通常是求 $\beta^\alpha = e^{\alpha Ln\, \beta}$，如

$$3^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{iLn}3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln 3 + \mathrm{i}(2k\pi\, \mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln 3 - 2k\pi}.$$

## 2.2.5 反三角函数

前边看到，在复变函数情况，指数函数是三角函数、对数函数、幂函数和一般指数函数的共同基础．下面看到，反三角函数可以用对数函数表示，所以也是以指数函数为基础的.

若 $z = \sin w$，则称 $w$ 为 $z$ 的反正弦函数，记为 $w = \arcsin z$，由

$$z = \sin w = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w})$$

知，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - 2\mathrm{i}z - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w} = 0,$$

或

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w})^2 - 2\mathrm{i}z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - 1 = 0 .$$

解出 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$，得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = \mathrm{i}z \pm \sqrt{1 - z^2} .$$

因 $\sqrt{1-z^2}$ 就表示二值，故“±”号可只取“+”号或只取“−”号，于是，有

$$\begin{aligned} w = \arcsin z &= \frac{1}{\mathrm{i}}\ln(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}) \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}[\ln(z + \frac{1}{\mathrm{i}}\sqrt{1 - z^2}) + \ln \mathrm{i}] = -\mathrm{i}\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$\arcsin z$ 是多值函数，其支点为 $z=\pm 1$ 和$\infty$，设 $D^*$是从 $z$ 平面上去掉射线： $y=0, x\geqslant 1$ 及 $y=0, x\leqslant -1$ 而得的区域，那么在 $D^*$内可把反正弦函数分成解析分支，且对它的任一解析分支，在 $D^*$任一点 $z$，有

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

类似地，我们定义 $z=\cos w$，$z=\tan w$ 的反函数为 $w=\arccos z$ 及 $w=\arctan z$，可得

$$\arccos z=\frac{1}{\mathrm{i}}\ln(z+\sqrt{z^2-1}),$$

$$\arctan z=-\frac{\mathrm{i}}{2}\ln\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}.$$

它们也都是多值函数，$z=\pm 1$ 及$\infty$是 $\arccos z$ 的支点；$z=\pm\mathrm{i}$ 是 $\arctan z$ 的支点，以连接支点的曲线作割线割破 $z$ 平面的区域内，它们都可分出其解析分支. 例如，在 $z$ 平面上取线段 $x$=0，$|y|\leqslant 1$ 作割线，在所得区域 $D$ 内，可把反正切 $\arctan z$ 分为解析分支，且每一分支有

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}}-\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{1+z^2},\qquad z\in D.$$

## § 2.3 习题

1. 判断下列函数的可微性及解析性:

(1) $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$;

(2) $f(z)=x^2+\mathrm{i}y^2$;

(3) $f(z)=2x^3+\mathrm{i}3y^3$;

(4) $f(z)=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^2)$.

2. 试证下列函数在 $z$ 平面上任何点都不解析:

(1) $|z|$;　　(2) $\operatorname{Re} z$;　　(3) $\dfrac{1}{\bar{z}}$.

3. 若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\upsilon(x,y)$ 在区域 $D$ 内解析，且满足下列条

件之一，试证 $f(z)$ 必恒为常数.

(1) $u(x, y)$在 $D$ 内恒为常数;

(2) $\upsilon(x, y)$在 $D$ 内恒为常数;

(3) $\arg f(z)$ 在 $D$ 内恒为常数;

(4) $au+b\upsilon$ 在 $D$ 内恒为常数 $c$，其中 $a,b,c$ 都是不为 0 的常数.

4. 若 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析，试证 $\mathrm{i}\overline{f(z)}$ 在 $D$ 内解析.

5. 设 $f(z)=u(r,\theta)+\mathrm{i}\upsilon(r,\theta)\quad (z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$，若 $u(r,\theta),\upsilon(r,\theta)$ 在点 $(r,\theta)$ 可微，且满足极坐标的 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial \upsilon}{\partial r}.$$

证明 $f(z)$ 在点 $z$ 可微，且

$$f'(z)=(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right).$$

6. 设区域 $D$ 和 $D_1$ 关于实轴对称，请判别下列命题的真伪：

(1) $f(z)$ 在 $D$ 解析$\Leftrightarrow \overline{f(\bar{z})}$ 在 $D_1$ 解析;

(2) $\overline{f(z)}$ 在 $D$ 解析$\Leftrightarrow f(\bar{z})$ 在 $D_1$ 解析;

(3) $f(z)$ 在 $D$ 解析$\Leftrightarrow \overline{f(z)}$ 在 $D$ 解析;

(4) $f(\bar{z})$ 在 $D$ 解析$\Leftrightarrow \overline{f(\bar{z})}$ 在 $D_1$ 解析;

(5) $f(z)$ 在 $D$ 解析$\Leftrightarrow f(\bar{z})$ 在 $D_1$ 解析;

(6) $\overline{f(z)}$ 在 $D$ 解析$\Leftrightarrow \overline{f(\bar{z})}$ 在 $D_1$ 解析.

7. 求下列方程的全部解：

(1) $\sin z=0$;　　(2) $\cos z=0$;

(3) $1+\mathrm{e}^{z}=0$;　　(4) $\ln z=\dfrac{\pi\mathrm{i}}{2}$;

(5) $\cos z+\sin z=0$.

8. 试证

(1) $\overline{\mathrm{e}^{z}}=\mathrm{e}^{\bar{z}}$;　　(2) $\overline{\sin z}=\sin\bar{z}$;　　(3) $\overline{\cos z}=\cos\bar{z}$.

9. 求 $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ 及 $3^{\mathrm{i}}$ 的值.

10. 指出下边各题在推理上的错误：

(1) $1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-1$;

(2) 因 $(-z)^2=z^2$，故

$$\mathrm{Ln}(-z)^2=\mathrm{Ln}z^2,$$

于是

$$\mathrm{Ln}(-z)+\mathrm{Ln}(-z)=\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z,$$

从而 $2\mathrm{Ln}z=2\mathrm{Ln}(-z)$，所以 $\mathrm{Ln}z=\mathrm{Ln}(-z)$ .

(3) 由

$$\arctan z=-\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z},$$

取 $z$=1，得

$$\begin{aligned}\arctan 1&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\left(\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}\right)^{\frac{2}{2}}\\&=\frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\left(\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}\right)^2=\frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\left(\frac{-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{4\mathrm{i}}\mathrm{Ln}(-1)=\frac{1}{8\mathrm{i}}\mathrm{Ln}1.\end{aligned}$$

# 第三章　复变函数的积分

解析函数的许多重要性质，往往用它的积分来表示. 例如，不用积分，就很难证明解析函数的各阶导函数是存在的，而且仍是解析函数. 看来只与微分有关的问题，却不能避免对积分的使用，这正是复变函数与实变函数最根本的区别之一. 本章要用复变函数的积分建立起解析函数一些最重要的定理，作为后边各章推出解析函数深刻性质的基础.

## § 3.1 积分及其性质

复变函数的积分，主要是考虑沿复平面上的曲线的积分，而讨论的曲线，如无特别声明仅限于光滑或逐段光滑曲线.

所讨论的曲线，还需确定其方向. 对于光滑或逐段光滑的闭曲线如果还是简单的，就特称它为**闭路**或**围线**. 对闭路 $C$ 规定其方向为：当观察者沿 $C$ 环行时，若 $C$ 的内部总在观察者的左方，就称此环行方向为 $C$ 的正向，记为 $C^+$ 或简记为 $C$; 若 $C$ 的内部总在观察者的右方，则称此环行方向为 $C$ 的负向，记为 $C^-$.

如果 $C$ 不是闭曲线，常通过指明始点和终点来确定其方向.

**定义 3.1** 设函数 $f(z)$ 在曲线 $C$：$\overset{\frown}{z_0 z}$ 上有界，沿曲线 $C$ 自 $z_0$ 到 $z$ 的方向在 $C$ 上依次取点 $z_0, z_1, \cdots, z_n$（$z_n$ 合于 $z$），分 $C$ 为 $n$ 个小弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$，其长为 $\Delta s_k\,(k=1,2,\cdots,n)$，任取点 $\zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$，记 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}\,(k=1,2,\cdots,n)$，$\lambda = \max\{\Delta s_k, k=1,2,\cdots,n\}$（图 3-1），若

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = I \qquad (I \text{ 为有限复常数}),$$

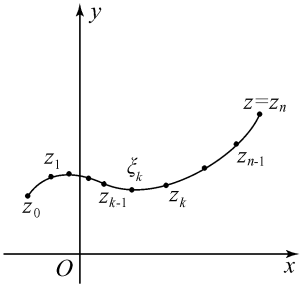



图 3−1

便称 $f(z)$ 沿 $C$ 可积, $I$ 称为 $f(z)$ 沿 $C$ 的积分，记为 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ . 即

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k .$$

曲线 $C$ 称为积分路线或积分路径.

**定理 3.1** 若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\upsilon(x,y)$ 沿曲线 $C$ 连续，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - \upsilon\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C \upsilon\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y . \tag{3-1}$$

**证** 令

$$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k ,\quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k ,$$

$$\zeta_k = \xi_k + \mathrm{i}\eta_k , x_{k-1} < \xi_k < x_k , y_{k-1} < \eta_k < y_k ,$$

$$f(\zeta_k) = u(\xi_k,\eta_k) + \mathrm{i}\upsilon(\xi_k,\eta_k) = u_k + \mathrm{i}\upsilon_k , k = 1,\cdots,n ,$$

$$\lambda_1 = \max\{|\Delta z_k|, k = 1,2,\cdots,n\} ,$$

则有

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(u_k + \mathrm{i}\upsilon_k)(\Delta x_k + \mathrm{i}\Delta y_k)\\ &= \lim_{\lambda_1\to 0}\sum_{k=1}^{n}[(u_k\Delta x_k - \upsilon_k\Delta y_k) + \mathrm{i}(\upsilon_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k)]\end{aligned}$$

$$= \int_C u\mathrm{d}x - \upsilon\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C \upsilon\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$

为了便于记忆，式(3-1)可形式地理解为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u + \mathrm{i}\upsilon)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y)\,.$$

若 $f(z)$ 在曲线 $C$： $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$， $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 连续时，有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t\,. \tag{3-2}$$

其实

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_C u\mathrm{d}x - \upsilon\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C \upsilon\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y \\
&= \int_\alpha^\beta u[x(t), y(t)]x'(t)\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta \upsilon[x(t), y(t)]y'(t)\mathrm{d}t \\
&\qquad + \mathrm{i}\int_\alpha^\beta \upsilon[x(t), y(t)]x'(t)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_\alpha^\beta u[x(t), y(t)]y'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)] + \mathrm{i}\upsilon[x(t), y(t)]\}\{x'(t) + \mathrm{i}y'(t)\}\mathrm{d}t \\
&= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

设 $f(z)$， $g(z)$ 在曲线 $C, C_1, C_2$ 上连续，则有

(1) $\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z$ （$k$ 为复常数）;

(2) $\int_C [f(z) + g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z + \int_C g(z)\mathrm{d}z$ ;

(3) $\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z$ ;

(4) $\int_{C_1+C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$，其中 $C_1+C_2$ 表示由 $C_1$ 与 $C_2$ 衔接起来的曲线;

(5) $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\mathrm{d}s$ (第一型曲线积分).

**证** 显然有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta s_k,$$

两边取极限得

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\mathrm{d}s.$$

若记 $\int_C |f(z)|\mathrm{d}s$ 为 $\int_C |f(z)||\mathrm{d}z|$，则得

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)||\mathrm{d}z|.$$

(6) 若 $f(z)$ 沿曲线 $C$ 满足 $|f(z)| \leqslant M$ ($M$ 为正实数, $l$ 为 $C$ 的弧长), 则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant Ml.$$

**例 3.1** 设 $C$ 为连接 $\alpha = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 以 $\beta = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的任一条曲线，计算 $I = \int_C z\mathrm{d}z$.

**解法 1** 由于

$$I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} z_k\Delta z_k, \text{ 且 } I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} z_{k-1}\Delta z_k,$$

其中，$\alpha = z_0, \beta = z_n$，于是有

$$2I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) = \beta^2 - \alpha^2.$$

故 $I = \dfrac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$.

**解法 2** 设 $\alpha = x_1 + \mathrm{i}y_1$， $\beta = x_2 + \mathrm{i}y_2$，则

$$I = \int_C x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

因两个曲线积分均与路径无关，于是若取积分路径如图 3-2 中的 $C_1+C_2$，则有

$$\begin{aligned}I &= \int_{C_1} x\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{C_1} y_1\mathrm{d}x - \int_{C_2} y\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_{C_2} x_2\mathrm{d}y \\ &= \int_{x_1}^{x_2} x\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{x_1}^{x_2} y_1\mathrm{d}x - \int_{y_1}^{y_2} y\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_{y_1}^{y_2} x_2\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2).\end{aligned}$$

若取积分路径为图 3-2 中的 $C_3$，因 $C_3$：$z = \alpha + (\beta - \alpha)t$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，则

$$I = \int_0^1 [\alpha + (\beta - \alpha)t](\beta - \alpha)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2).$$

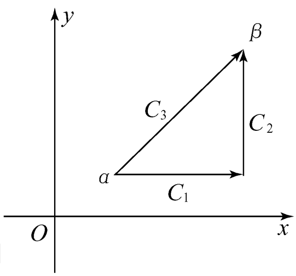



图 3-2

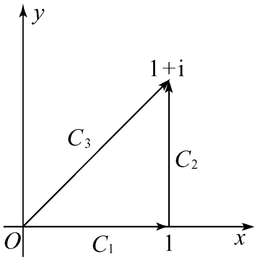



图 3-3

**例 3.2** 设 $C_1, C_2, C_3$ 为图 3-3 中所示直线段，计算

(1) $\displaystyle\int_{C_3} \operatorname{Re} z\mathrm{d}z$；　　(2) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \operatorname{Re} z\mathrm{d}z$.

**解**(1) $C_3 : z = (1+\mathrm{i})t$，则 $0 \leqslant t \leqslant 1$，

$$\int_{C_3} \operatorname{Re} z\mathrm{d}z = \int_0^1 t(1+\mathrm{i})\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i});$$

(2) $C_1$： $z=t$，$0\leqslant t\leqslant 1$, $C_2$： $z=1+\mathrm{i}t$，$0\leqslant t\leqslant 1$,

$$\int_{C_1+C_2} \operatorname{Re} z\mathrm{d}z = \int_{C_1} \operatorname{Re} z\mathrm{d}z + \int_{C_2} \operatorname{Re} z\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_0^1 \mathrm{i}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \mathrm{i}.$$

**例 3.3** 设曲线 $C$ 为圆周 $|z-z_0|=R$，求积分 $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$.

**解** $C$： $z-z_0 = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，于是,

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}R^{1-n}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \mathrm{i}R^{1-n}\int_0^{2\pi} [\cos(1-n)\theta + \mathrm{i}\sin(1-n)\theta]\mathrm{d}\theta \tag{3-3}$$

$$= \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & \text{当} n=1 \text{时}; \\ 0, & \text{当} n\neq 1 \text{时}. \end{cases}$$

# § 3.2 柯西定理

柯西定理和下边介绍的柯西公式是复变函数的基本定理和基本公式, 解析函数的许多重要结果, 都是利用它们导出的.

## 3. 2. 1 单连通区域的柯西定理

积分不仅依赖于被积函数, 而且依赖于所取曲线 $C$. 设 $f(z)$ 在区域 $D$ 内连续, 那么当我们在 $D$ 内取两条不同曲线 $C_1$ 及 $C_2$ 连接两点 $z_1, z_2$ 时, 积分 $\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z$ 与 $\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$ 一般是不相等的, 但在例 3.1 中, 积分路径虽不同, 但沿不同路径积分总是同一个数, 因此, 人们很自然地提出: 函数应当满足怎样的条件, 才能使它的积分与积分路径无关呢？像

实函数曲线积分情形一样，和这个问题相联系的是找出函数沿任一条闭曲线的积分为零的条件. 由定理 3.1，问题就转化为实函数的线积分的相应问题，于是不难推出下列定理.

**定理 3.2** 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 $D$ 内解析，并且 $f'(z)$ 在 $D$ 连续，则对 $D$ 内任一闭路 $C$，有 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0$.

**证** 回顾曲线积分的格林(Green)定理，若 $P(x, y)$， $Q(x, y)$ 在区域 $D$ 有一阶连续偏导数且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$，则 $\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

已知 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - \upsilon\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C \upsilon\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$. 因 $f'(z)$ 在 $D$ 连续，故 $u, \upsilon$ 都有一阶连续偏导数且由 C-R 条件得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}.$$

据格林定理

$$\int_C u\mathrm{d}x - \upsilon\mathrm{d}y = 0, \quad \int_C \upsilon\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = 0,$$

故

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

定理 3.2 中关于 $f'(z)$ 连续的条件，是可以去掉的, 1900 年，法国数学家古莎(Grourat)证明了以下仍称为柯西定理的命题.

**定理 3.3** （柯西定理）若 $D$ 为单连通域， $f(z)$ 在 $D$ 解析，则对 $D$ 内任一闭路 $C$，有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

此定理证明较繁，在此我们略去对它的证明.

波拉德(Pollard)于 1923 年把定理 3.3 又作了进一步的推广：

**定理 3.4** 若函数 $f(z)$ 在闭路 $C$ 的内部 $D$ 解析，在闭域 $\overline{D} = D + C$

上连续，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0 .$$

**例 3.4** 因 $az^n$ ( $a$ 为常数，$n$ 为非负整数)，$\sin z$ 、 $\cos z$ 、 $\mathrm{e}^z$ 在 $z$ 平面上都解析，故对 $z$ 平面上任一闭路 $C$，有

$$\int_C az^n \mathrm{d}z = 0, \quad \int_C 2\mathrm{e}^z z^2 \sin 2z\mathrm{d}z = 0 .$$

**例 3.5** 设 $C_1$： $|z|=1$， $C_2$： $|z|=2$，显然有

(1) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{z\mathrm{e}^z}{\cos z}\mathrm{d}z = 0$；　(2) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{\sin z}{z-3}\mathrm{d}z = 0$；

(3) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z+2}\mathrm{d}z = 0$；又 $C_1 : z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$，故

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \frac{1}{z+2}\mathrm{d}z &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{i}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}{2+(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{i}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(2+\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)}{(2+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta)}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2\sin\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta + \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

从而

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2\sin\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta = 0 .$$

**定理 3.5** 设函数 $f(z)$ 在 $z$ 平面上的单连通区域 $D$ 内解析. $C$ 为 $D$ 内的任一闭曲线(不必是简单的)，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0 .$$

**证** 因 $C$ 总可以由 $D$ 内的简单闭曲线衔接而成，如图 3-4 所示，由复积分性质及定理 3.3 便可得证.

设 $z_1$，$z_2$ 是区域 $D$ 内的任意两点，$L_1$，$L_2$ 是位于 $D$ 内的任二条连接 $z_1$ 到 $z_2$ 的曲线，如果

$$\int_{L_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{L_2} f(z)\mathrm{d}z$$

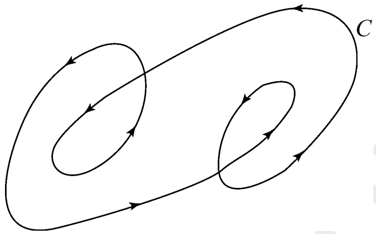



图 3-4

那么就称函数 $f(z)$ 在 $D$ 内的积分与路径无关，此时，记积分为

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z\,.$$

若函数 $f(z)$ 在单连通区域 $D$ 内解析，容易证明，函数 $f(z)$ 在 $D$ 内的积分与路径无关. 事实上，设 $z_1$, $z_2$ 是 $D$ 内任意二点, $L_1$, $L_2$ 是位于 $D$ 内的任意二条连接 $z_1$ 到 $z_2$ 的曲线，则正方向曲线 $L_1$ 与负方向曲线 $L_2$ 就衔接成 $D$ 内一条闭曲线(不必是简单的)$C$，如图 3-5 所示，于是有

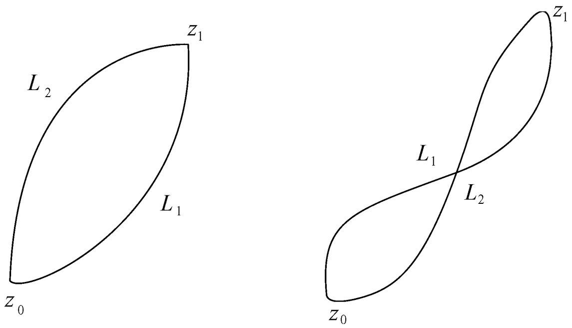



图 3-5

$$0 = \int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{L_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{L_2^-} f(z)\mathrm{d}z\,,$$

故得

$$\int_{L_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{L_2} f(z)\mathrm{d}z\,.$$

### 3.2.2 解析函数的原函数

若函数 $f(z)$ 在单连通域 $D$ 解析，$f(z)$ 沿 $D$ 内点 $z_0$ 到 $D$ 内点 $z$ 的积分与连接点 $z_0$ 到 $z$ 的曲线无关，当 $z_0$ 选定之后，积分由 $z$ 唯一确定，于是，由这个积分确定了 $D$ 上的一个单值函数，记为

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\,.$$

**定理 3.6** 设函数 $f(z)$ 在单连通区域 $D$ 内连续，且沿 $D$ 内任一闭曲线的积分等于 0，则函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,\quad (z_0, z \in D)$$

在 $D$ 内解析，并且有

$$F'(z) = f(z),\quad z \in D\,.$$

**证** 所设条件已保证了 $F(z)$ 是一个单值函数，以下只须证明 $F(z)$ 在 $D$ 处处可微，并且有

$$F'(z) = f(z)\,.$$

任意取点 $z \in D$，以 $z$ 为中心作一全部含在 $D$ 内的圆域 $K$，设 $z+\Delta z \in K$，$\Delta z \neq 0$ (图 3-6).

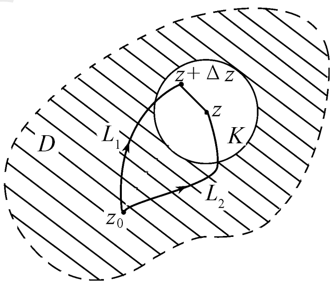



图 3-6

因

$$\int_{L_2} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\ell} f(z)\mathrm{d}z+\int_{L_1^-} f(z)\mathrm{d}z=0,$$

其中 $L_1$ 是位于 $D$ 内连接由点 $z_0$ 到点 $z+\Delta z$ 的任一曲线，$L_2$ 是位于 $D$ 内的连接点 $z_0$ 到点 $z$ 的任一曲线，$\ell$ 是位于 $K$ 内的连接点 $z$ 到点 $z+\Delta z$ 的直线段. 故

$$\int_{L_1} f(z)\mathrm{d}z-\int_{L_2} f(z)\mathrm{d}z=\int_{\ell} f(z)\mathrm{d}z.$$

于是

$$\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}z-\int_{z_0}^{z} f(z)\mathrm{d}z=\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}z,$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}&=\frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]\\&=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

因

$$f(z)=f(z)\cdot\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta,$$

故

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta.$$

据 $f(\zeta)$ 的连续性，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|\zeta-z|<\delta$，且 $\zeta\in K$ 时，恒有 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. 从而取 $K$ 使 $K$ 内一切点ζ都满足 $|\zeta-z|<\delta$，则 $z+\Delta z\in K, 0<|\Delta z|<\delta$，

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|\leqslant\frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z|=\varepsilon,$$

于是 $F'(z)=f(z), z\in D$.

**推论** 若 $f(z)$ 在单连通区域 $D$ 内解析，则定义在 $D$ 内的函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \quad (z_0, z\in D)$$

在 $D$ 内也解析，并且 $F'(z)=f(z), z\in D$.

如果在区域 $D$ 内恒有 $\varPhi'(z)=f(z)$，那么就称 $\varPhi(z)$ 是 $f(z)$ 在 $D$ 内的一个**原函数**或**不定积分.**

据上面的推论知，在单连通区域 $D$ 内解析的函数，必有原函数.

设 $f(z)$ 在单连通区域 $D$ 内解析，$\varPhi(z)$ 是 $f(z)$ 的任意一个原函数，即

$$\varPhi'(z)=f(z), \quad z\in D.$$

由定理 3.6 知,

$$F'(z)=\left(\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)'=f(z), \quad z\in D.$$

于是，$[\varPhi(z)-F(z)]'=0$，从而 $\varPhi(z)-F(z)=C$($C$ 为常数). 在

$$\varPhi(z)=F(z)+C=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta+C$$

中，令 $z=z_0$，得到

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\varPhi(z)-\varPhi(z_0). \tag{3-4}$$

公式(3-4)中的 $\varPhi(z)-\varPhi(z_0)$ 也记作 $\varPhi(z)\Big|_{z_0}^{z}$.

**例 3.6** $\displaystyle\int_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}} z^2\mathrm{d}z=\frac{z^3}{3}\Big|_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}=-\frac{2}{3}\mathrm{i}$.

**例 3.7** 在区域 $-\pi<\arg z<\pi$ 内，$F(z)=\ln z$ 是 $\dfrac{1}{z}$ 的一个原函数，而 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在 $D$ 解析，故有

$$\ln z=\int_{1}^{z} \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta+\ln 1=\int_{1}^{z} \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta.$$

**例 3.8** 设 $f(z)$，$g(z)$ 在单连通区域 $D$ 内都是解析函数，$\alpha, \beta$ 是 $D$ 内两点，证明

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)g'(z)\mathrm{d}z = f(z)g(z) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(z)g(z)\mathrm{d}z . \qquad (3\text{-}5)$$

**证** 因对 $D$ 内任一点 $z$，有

$$[f(z)g(z)]' = f(z)g'(z) + f'(z)g(z) ,$$

故

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(z)g'(z) + f'(z)g(z)]\mathrm{d}z = f(z)g(z)\Big|_{\alpha}^{\beta} ,$$

从而得到式(3-5).

**例 3.9**

$$\int_{1}^{\pi\mathrm{i}} z\mathrm{e}^{z}\mathrm{d}z = z\mathrm{e}^{z}\Big|_{1}^{\pi\mathrm{i}} - \int_{1}^{\pi\mathrm{i}} \mathrm{e}^{z}\mathrm{d}z = [-\pi\mathrm{i} - \mathrm{e}] - [-1 - \mathrm{e}] = 1 - \pi\mathrm{i} .$$

### 3.2.3 多连通区域的柯西定理

**定义 3.2** 考虑 $n+1$ 条闭路 $C_0, C_1, \cdots, C_n$，其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 中的每一条都在其余各条的外部，而它们又都在 $C_0$ 的内部. 在 $C_0$ 的内部同时又在 $C_1, \cdots, C_n$ 外部的点集构成一个有界的多连通区域 $D$，以 $C_0, C_1, \cdots, C_n$ 为它的边界. 在这种情况下，称区域 $D$ 的边界是一条复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$，它包括取正方向 $C_0$，以及取负方向的 $C_1, C_2, \cdots, C_n$. 即假如观察者沿复合闭路 $C$ 正方向绕行时，区域 $D$ 总在观察者的左侧(图 3-7 是 $n$ =2 情形).

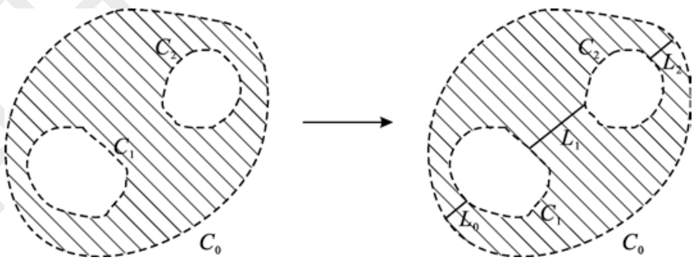



图 3-7

**定理 3.7** 设 $D$ 是由复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 所围成的多

连通区域，$f(z)$ 在 $D$ 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 连续，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0\,.$$

即

$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n^-} f(z)\mathrm{d}z=0\ , \tag{3-6}$$

或写成

$$\int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z\,. \tag{3-7}$$

**证** 取 $n+1$ 条互不相交且位于 $D$ 内（端点除外）的光滑弧 $L_0,L_1,\cdots,L_n$，以这 $n+1$ 条弧为割线顺次地与 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 连接. 将 $D$ 沿割线割破，于是 $D$ 就被分成两个单连通区域(图 3-7 是 $n$=2 的情形)，其边界各是一条闭路，分别记为 $\Gamma_1$ 及 $\Gamma_2$，据定理 3.4，有

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z=0,\quad \int_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z=0\,.$$

将此二等式相加，注意到沿 $L_0,L_1,\cdots,L_n$ 的积分，各从相反的两个方向取了一次，在相加的过程中互相抵消. 于是，由复积分的性质便得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0\,.$$

**例 3.10** 设 $n$ 为整数, $C$ 是任一闭路, $z_0$ 是 $C$ 内一个定点，求积分

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}\,.$$

**解** 在 $D$ 之内部作圆周 $C_r:|z-z_0|=r$，据定理 3.7 及式(3-3)有

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}=\int_{C_r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & 当 n=1 时;\\ 0, & 当 n\neq 1 时.\end{cases}$$

**例 3.11** 设闭路 $C_0$ 的内部含有点 0 及点 1，求积分

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z^2 - z}.$$

**解** 取充分小的正数 $r$ 及 $p$，使 $C_r:|z|=r$ 及 $C_p:|z-1|=p$ 皆在 $C_0$ 的内部且 $C_r$ 与 $C_p$ 每个皆在另一个的外部(图 3-8).

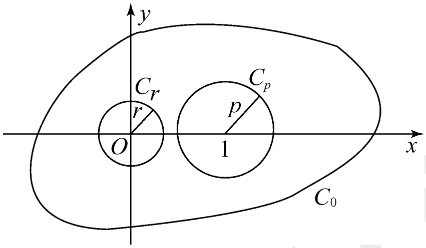



图 3-8

据定理 3.7，有

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z^2 - z} = \int_{C_r} \frac{dz}{z^2 - z} + \int_{C_p} \frac{dz}{z^2 - z}.$$

又

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z^2 - z} = \int_{C_r} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right)dz = \int_{C_r} \frac{1}{z-1}dz - \int_{C_r} \frac{1}{z}dz = 0 - 2\pi i = -2\pi i,$$

$$\int_{C_p} \frac{dz}{z^2 - z} = \int_{C_p} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right)dz = \int_{C_p} \frac{1}{z-1}dz - \int_{C_p} \frac{1}{z}dz = 2\pi i - 0 = 2\pi i,$$

故 $\displaystyle\int_{C_0} \frac{dz}{z^2 - z} = 2\pi i - 2\pi i = 0$.

# § 3.3 柯西公式

## 3.3.1 柯西公式

**定理 3.8** 设区域 $D$ 的边界是闭路(或复合闭路)$C$，$f(z)$ 在 $D$ 内解析，在 $\overline{D} = D + C$ 上连续，则有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z, \quad z_0 \in D, z\in C. \tag{3-8}$$

**证** 对 $D$ 内任一点 $z_0$，取 $r$ 充分小，作圆域 $K_r:|z-z_0|<r$ 使 $K_r$ 含于 $D$ 内，且 $C_r:|z-z_0|=r$ 与 $C$ 无公共点，捅掉 $K_r$ 得以 $C^*=C+C_r^-$ 为边界的域 $D^*$(图 3-9).

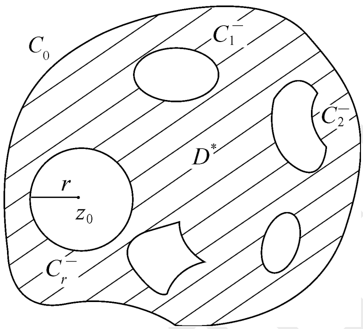



图 3-9

因 $f(z)$ 在 $D^*$解析，在 $\overline{D}^*=D^*+C^*$ 连续，由定理 3.7，有

$$\int_{C^*}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}=0.$$

故

$$\begin{aligned}\int_C\frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}&=\int_{C_r}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}=\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\\&=\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z+2\pi\mathrm{i}f(z_0).\end{aligned} \tag{3-9}$$

再把捅掉的 $K_r$ 补上(即令 $r\to 0$). 下证 $r\to 0$ 时，

$$\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\to 0.$$

因 $f(z)$ 在 $z_0$ 连续，故对 $\dfrac{\varepsilon}{2\pi}$，存在 $\delta>0$，使当 $|z-z_0|<\delta$ 且 $z\in K_r$ 时，恒有

$$|f(z)-f(z_0)|<\frac{\varepsilon}{2\pi r},$$

从而恒有

$$\left|\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|<2\pi r\frac{\varepsilon}{2\pi r}=\varepsilon,$$

即证得

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z=0.$$

在式(3-9)两端令 $r\to 0$，便得到式(3-8)．常将式(3-8)写成

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,\qquad z\in D,\zeta\in C.$$

式(3-8)称为**柯西积分公式**，简称**柯西公式**，它反映了解析函数值之间很深刻的性质：$f(z)$ 在 $D$ 内的值，可由它在边界上的值通过积分而得到，只要 $f(z)$ 在 $C$ 上的值已确定，$f(z)$ 在 $D$ 内的值也就随之确定．据此可得出许多重要结论．

**例 3.12** 取 $C$：$|z|=1$，有

(1) $\displaystyle\int_C\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot 0=0$；

(2) $\displaystyle\int_C\frac{\mathrm{e}^z}{z(z-2)}\mathrm{d}z=\int_C\frac{\frac{\mathrm{e}^z}{(z-2)}}{z}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^0}{0-2}=-\pi\mathrm{i}$．

**例 3.13** 取 $C$：$|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{2}$，有

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{z(z^2+1)}=\int_C\frac{\frac{1}{z(z+\mathrm{i})}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\mathrm{i}(\mathrm{i}+\mathrm{i})}=-\pi\mathrm{i}.$$

**例 3.14** 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，在 $|z-z_0|\leqslant R$ 上连续，则有

$$
\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{C_R} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z \quad (C_R:|z-z_0|=R) \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} \mathrm{i}f(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.
\end{aligned} \tag{3-10}
$$

式(3-10)说明：解析函数在圆心的函数值，等于它在圆周上的平均值.

**例 3.15** 设 $f(z)$，$g(z)$ 在闭路 $C$ 的内部 $D$ 解析，在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上连续，证明：若在闭路 $C$ 上成立 $f(z)=g(z)$，则在 $D$ 内，$f(z)=g(z)$ 也成立.

**证** 任取 $z\in D$，则

$$
f(z)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{C_R}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=g(z)\ .
$$

**例 3.16** 利用积分 $\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z \quad (C:|z|=1即\ z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}，\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ ，计算实积分

$$
\int_C \mathrm{e}^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta \text{ 及 } \int_C \mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta\ .
$$

**解** 由柯西公式

$$
\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z=2\pi\,\mathrm{i}\ .
$$

又

$$
\begin{aligned}
\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+\mathrm{i}\sin(\sin\theta)]\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

故得

$$
2\pi\,\mathrm{i}=-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)]\mathrm{d}\theta\ .
$$

从而有

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

### 3.3.2 解析函数的高阶导数

**定理 3.9** 在定理 3.8 的条件下，$f(z)$ 在 $D$ 内有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{3-11}$$

**证** 现证 $n$=1 时，式(3-11)成立，设 $z$ 为 $D$ 内任意一点，取 $\Delta z \neq 0$，使 $z + \Delta z \in D$，只须证明当 $\Delta z \to 0$ 时，下式也趋于 0.

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(\zeta - z)^2}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - \Delta z}\mathrm{d}\zeta\right. \\
&\quad \left.- \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta\right] - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(z)}{(\zeta - z)^2}\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{\Delta z}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2}\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}$$

设以 $z$ 为圆心，以 $2d$ 为半径的圆域完全在 $D$ 内，并在此圆域中取 $z + \Delta z$ 使得 $0 < \Delta z < d$，那么当 $\zeta \in C$ 时，

$$|\zeta - z| > d, \quad |\zeta - z - \Delta z| > d.$$

设 $M$ 是$|f(z)|$在 $C$ 的一个上界，$C$ 的长度为 $l$，于是有

$$\left|\frac{\Delta z}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2}\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \frac{|\Delta z|}{2\pi}\frac{Ml}{d^2},$$

因此当$|\Delta z| \to 0$时，

$$\frac{\Delta z}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2}\mathrm{d}\zeta \to 0.$$

应用数学归纳法，可证明 $f(z)$ 在 $D$ 内有任意阶导数，且式(3-11)成

立.

据定理 3.9 知，若 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析，则 $f(z)$ 在 $D$ 内有任意阶导数. 其实，设 $z$ 是 $D$ 内任意一点，以 $z$ 为圆心作一个完全在 $D$ 内的闭圆域，对此闭圆域应用定理 3.9，可见 $f(z)$ 在 $z$ 有任意阶导数.

式(3-11)说明了柯西积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

关于 $z$ 求导时，允许在积分号下求导，即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right) &= \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right]\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

一个定义在实数区间上可导的实函数 $f(x)$，其导数 $f'(x)$ 就不一定可导了. 如

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 处处可导，但

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 不可导. 但是，在一个区域上可导的复变函数，在 $D$ 内的各阶导数都存在. 这是与实函数很不相同的结论，是实函数与复变函数的又一重大差异.

**例 3.17** 设 $f(z)$，$g(z)$ 是解析函数；且

$$f(z_0)=g(z_0)=0,\quad g'(z_0)\neq 0,$$

证明：

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

**证**

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{f'(z)}.$$

**例 3.18** 设 $C_r:|z|=r$，考察 $r$ 取不同值时，积分

$$\int_{C_r}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+1)(z-1)}\text{的值.}$$

解 (1) 当 $0<r<1$ 时,

$$\begin{aligned}\int_{C_r}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+1)(z-1)}&=\int_{C_r}\frac{\dfrac{1}{(z+1)(z-1)}}{z^3}\mathrm{d}z\\&=\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{2}\left[\frac{1}{(z+1)(z-1)}\right]''\Bigg|_{z=0}\\&=\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right]''\Bigg|_{z=0}\\&=\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}\left[\frac{2}{(z-1)^3}-\frac{2}{(z+1)^3}\right]''\Bigg|_{z=0}\\&=-2\pi\,\mathrm{i}.\end{aligned}$$

(2) 当 $|z|=r=1$ 时，所说积分不存在.

(3) 当 $1<r<+\infty$ 时，在 $C$ 内作三个小圆

$$C_{r_{-1}}:|z+1|=r_{-1},\quad C_{r_1}:|z-1|=r_1,\quad C_{r_0}:|z|=r_0,$$

且使每一个都在其余两圆周的外部，但它们都在 $C_r$ 之内部(图 3-10)，则有

$$\begin{aligned}&\int_{C_r}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+1)(z-1)}\\&=\int_{C_{r_{-1}}}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+1)(z-1)}+\int_{C_{r_0}}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+1)(z-1)}+\int_{C_{r_1}}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+1)(z-1)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{C_{r_{-1}}}\frac{\dfrac{1}{z^3(z-1)}}{z+1}\mathrm{d}z+\int_{C_{r_0}}\frac{\dfrac{1}{(z+1)(z-1)}}{z^3}\mathrm{d}z+\int_{C_{r_1}}\frac{\dfrac{1}{z^3(z+1)}}{z-1}\mathrm{d}z\\
&=2\pi\mathrm{i}[\frac{1}{(-1)^3(-1-1)}-2\pi\mathrm{i}+\frac{2\pi\mathrm{i}}{2}]\\
&=0.
\end{aligned}
$$

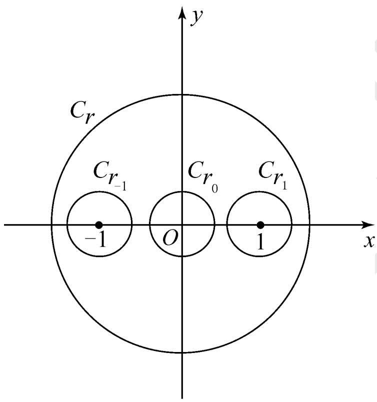



图 3-10

**定理 3.10** 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\upsilon(x,y)$ 在区域 $D$ 解析的充要条件是

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x},\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}$ 在 $D$ 内连续;

(2) $u(x,y),\upsilon(x,y)$ 在 $D$ 内满足 C-R 条件.

**证** 充分性. 因 $u,\upsilon$ 的一阶偏导数均连续, 故 $u,\upsilon$ 在 $D$ 可微, 又 $u,\upsilon$ 在 $D$ 满足 C-R 条件, 故 $f(z)$ 在 $D$ 可微, $D$ 是区域, 于是 $f(z)$ 在 $D$ 解析.

必要性. 因 $f(z)$ 在 $D$ 解析, 故 $u,\upsilon$ 在 $D$ 满足 C-R 条件; 又因

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\mathrm{i}(-\frac{\partial u}{\partial y})$$

在区域 $D$ 连续，故

$$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial \upsilon}{\partial x},\frac{\partial \upsilon}{\partial y}$$

在区域 $D$ 连续.

**定理 3.11** (莫勒尔 Morera 定理)若函数 $f(z)$ 在单连通区域 $D$ 内连续，且对 $D$ 内任一闭路 $C$，有

$$\int_c f(\mathrm{z})\mathrm{dz}=0,$$

则 $f(z)$ 在 $D$ 解析.

**证** 由假设知

$$F(\mathrm{z})=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

是 $D$ 内的解析函数，且 $F'(z)=f(z)$. 因解析函数的导数在 $D$ 内解析. 故 $f(z)=F'(\mathrm{z})$ 在 $D$ 内解析.

**定理 3.12** $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析的充要条件是

(1) $f(z)$ 在 $D$ 连续;

(2) 对任一闭路 $C$，只要 $C$ 及其内部全含于 $D$ 内，就有

$$\int_c f(\mathrm{z})\mathrm{dz}=0.$$

**证** 必要性可由定理 3.3 导出. 至于充分性，可在 $D$ 内任一点 $z_0$ 的一个邻域 $N(z_0,\rho)$：$|z-z_0|<\rho$ 内来应用定理 3.11. 只要$\rho$充分小，就知 $f(\mathrm{z})$ 在 $N(z_0,\rho)$ 内解析，特别地，在 $z_0$ 解析；因 $z_0$ 可在 $D$ 内任意取，故 $f(z)$ 在 $D$ 内解析.

**定理 3.13** 设 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析，$a$ 为 $D$ 内一点，作 $C_R:|z-a|=R$，使 $\overline{K}_R:|z-a|\leqslant R$ 全含于 $D$ 内，则有

$$\left|f^{(n)}(a)\right|\leqslant\frac{n!}{R^n}M_R,M_R=\max_{|z-a|=R}|f(z)|. \tag{3-12}$$

式(3-12)称为柯西不等式.

**证** 应用定理 3.9 于 $\overline{K}_R$ 上，则有

$$\left|f^{(n)}(a)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z\right|$$
$$\leqslant\frac{n!}{2\pi}M_R\frac{1}{R^{n+1}}2\pi R=\frac{n!}{R^n}M_R.$$

**定理 3.14** (Liouville)若 $f(z)$ 在 $z$ 平面上解析且有界，则函数必为常数.

**证** 设 $|f(z)|$ 的上界为 $M$，则在式(3.12)中，对无论什么样的 R，均有 $M_R\leqslant M$，于是令 $n=1$，有

$$|f'(a)|\leqslant\frac{M}{R}.$$

上式对一切 R 均成立，让 $R\to+\infty$，即知 $f'(a)=0$，而 $a$ 是 $z$ 平面上任一点，故 $f(z)$ 在 $z$ 平面上的导数为零. 故 $f(z)$ 必为常数.

**定理 3.15** (代数学基本定理)在 $z$ 平面上的 $n$ 次多项式

$p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n \quad (a_0\neq 0)$ 至少有一个零点.

**证** 用反证法. 设 $p(z)$ 在 $z$ 平面上无零点，则 $\dfrac{1}{p(z)}$ 在 $z$ 平面上解析. 由于

$$\lim_{z\to\infty}p(z)=\lim_{z\to\infty}z^n\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}\right)=\infty,$$

故

$$\lim_{z\to\infty}=\frac{1}{p(z)}=0.$$

从而存在充分大的正数 $R$，使当$|z|>R$ 时，$\left|\dfrac{1}{p(z)}\right|<1$，又因 $\dfrac{1}{p(z)}$ 在$|z|\leqslant R$ 上连续，故可设 $\left|\dfrac{1}{p(z)}\right|\leqslant M$ (正常数)，于是在 $z$ 平面上，$\left|\dfrac{1}{p(z)}\right|<M+1$，由定理3.14，$\dfrac{1}{p(z)}$ 必为常数，即 $p(z)$ 必为常数. 结论与定理的假设矛盾，故定理得证.

# § 3.4 调和函数

调和函数与解析函数的实虚部有着极为深刻的内在联系，因而它在解析函数的理论中具有一定的地位；调和函数又是许多实际问题中经常遇到的函数，因此它在实践中也有着重要意义．本节只对解析函数的实、虚部与调和函数的关系作一些初步的介绍.

**定义 3.2** 若实二元函数 $T(x,y)$ 在区域 $D$ 内有连续的二阶偏导数，且满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0,$$

便称 $T(x,y)$ 为 $D$ 内的**调和函数**.

**定理 3.16** 若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\upsilon(x,y)$ 在区域 $D$ 内解析，则 $u(x,y)$ 与 $\upsilon(x,y)$ 均为 $D$ 内的调和函数.

**证** 由假设，$u,\upsilon$ 在 $D$ 内满足 C-R 条件，且 $f''(z)$ 在 $D$ 内连续，从而 $u,\upsilon$ 在 $D$ 内有二阶连续偏导数，因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y\partial x}\\&=0,\end{aligned}$$

即 $u$ 是 $D$ 内的调和函数．同样证明 $\upsilon$ 也是 $D$ 内的调和函数.

上述定理的逆定理不成立．如 $f(z)=\bar{z}=x+\mathrm{i}(-y),u=x,\upsilon=-y$ 都是 $z$ 平面上的调和函数，但 $f(z)=\bar{z}$ 在 $z$ 平面上处处不解析.

**定义 3.3** 若在区域 $D$ 内，$u(x,y)$ 与 $\upsilon(x,y)$ 均为调和函数，且 $u,\upsilon$ 在 $D$ 满足 C-R 条件，则称 $\upsilon$ 是 $u$ 在 $D$ 内的**共轭调和函数**.

**定理 3.17** 若 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析，则 $\upsilon=\operatorname{Im}f(z)$ 是 $u=\operatorname{Re}f(z)$ 的共轭调和函数.

此定理的证明是明显的.

**定理 3.18** 若在区域 $D$ 内，$\upsilon(x,y)$ 是 $u(x,y)$ 的共轭调和函数，则 $f(z)=u+\mathrm{i}\upsilon$ 是 $D$ 内的解析函数.

**证** 由假设 $u,\upsilon$ 在 $D$ 内有一阶连续偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial \upsilon}{\partial x},\frac{\partial \upsilon}{\partial y}$，又在 $D$ 内 $u,\upsilon$ 满足 C-R 条件，故据定理 3.10 知 $f(z)=u+\mathrm{i}\upsilon$ 在区域 $D$ 内解析.

由定理 3.17 及定理 3.18 知：

$f(z)$ **在区域 D 内解析的充要条件是在 D 内** $\upsilon=\operatorname{Im} f(z)$ **是** $u=\operatorname{Re} f(z)$ **共轭调和函数**.

由此可见调和函数与解析函数的深刻联系.

设 $D$ 为单连通域，自然有以下两个问题：

(1) 已知 $D$ 内的解析函数的实部 $u(x,y)$，在 $D$ 内确定该解析函数的虚部 $\upsilon(x,y)$. 这等价于已知 $D$ 内的调和函数 $u(x,y)$，在 $D$ 内求 $u(x,y)$ 的共轭调和函数 $\upsilon(x,y)$.

(2) 已知 $D$ 内解析函数的虚部 $\upsilon(x,y)$，在 $D$ 内确定该解析函数的实部 $u(x,y)$，这等价于在 $D$ 内求调和函数 $u(x,y)$，使 $\upsilon(x,y)$ 是 $u(x,y)$ 的共轭调和函数.

由于 $D$ 是单连通区域，而且由问题中的条件，在 $D$ 内有

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}\upsilon=\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y.$$

于是问题(1), (2)可分别按以下公式求解：

$$\upsilon=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C, \tag{3.13}$$

$$u=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\mathrm{d}y+C, \tag{3.14}$$

其中 $(x_0,y_0)\in D$, $C$ 是任意实常数.

**例 3.19** 已知 解析函数的实部 $u=y^3-3x^2y$，求该解析函数的虚

部 $\upsilon(x,y)$，从而求出此解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,\upsilon(x,y)$，且使 $f(2)=\mathrm{i}$.

**解** 利用公式(3-13)，取积分路线如图 3-11 所示，有

$$
\begin{aligned}
\upsilon &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y + C \\
&= \int_0^x 3x^2\mathrm{d}x + \int_0^y (-6xy)\mathrm{d}y + C \\
&= x^3 - 3xy^2 + C.
\end{aligned}
$$

于是 $f(z)=u+\mathrm{i}\upsilon=y^3-3x^2y+\mathrm{i}(x^3-3xy^2)+\mathrm{i}C$. 由 $f(2)=\mathrm{i}$,

得 $\mathrm{i}=\mathrm{i}(8+C)$，即 $C=-7$，故

$$f(z)=y^3-3x^2y+\mathrm{i}(x^3-3xy^2)-7\mathrm{i}.$$

**例 3.20** 已知解析函数的虚部

$$\upsilon=\arctan\frac{y}{x},\qquad (x>0),$$

求该解析函数的实部 $u$，从而确定此解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,\upsilon(x,y)$.

**解** 利用公式(3-14)取积分路线如图 3-12，有

$$
\begin{aligned}
u &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{\partial \upsilon}{\partial y}\mathrm{d}x - \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\mathrm{d}y + C \\
&= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\mathrm{d}x - \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\mathrm{d}y + C \\
&= \int_1^x \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_0^y \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y + C \\
&= \ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \ln x + C \\
&= \ln\sqrt{x^2+y^2} + C,
\end{aligned}
$$

故 $f(z)=\mathrm{i}\arctan\dfrac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}+C$

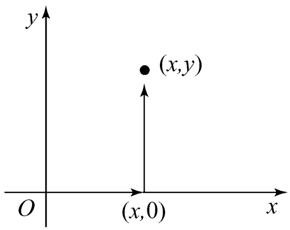



图 3-11

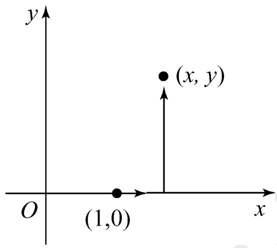



图 3-12

对于解析函数 $f(z)$，已知 $u=\mathrm{Re}\,f(z)$ 或已知 $\upsilon=\mathrm{Im}\,f(z)$ 时，也可先求出 $f'(z)$ 然后再求出 $f(z)$ 来，从而就求得 $\upsilon$ 或 $u$ 了，我们用此法重新求解例 3.19 和例 3.20.

对例 3.19，因

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy-\mathrm{i}(3y^2-3x^2)=3z^2\mathrm{i}\,,$$

故

$$f(z)=\int_0^z f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta+C=\int_0^z \mathrm{i}3\zeta^2\mathrm{d}\zeta+C=\mathrm{i}z^3+C\,,$$

由 $f(2)=\mathrm{i}$，得 $8\,\mathrm{i}+C=\mathrm{i}, C=-7\mathrm{i}$，故

$$f(z)=\mathrm{i}(z^3-7)\,.$$

对例 3.20，因

$$f'(z)=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}+\mathrm{i}\frac{-\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{1}{z}\quad,$$

故

$$f(z)=\int_1^z f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta+C=\int_1^z \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta+C=\ln z+C\,.$$

# § 3.5 习题

1. 计算 Re z 沿曲线 $C$: $z = t + \mathrm{i}t^2$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 的积分.

2. 设 $C$ 为连接 –i 到 i 的直线段，证明 $\left|\int_C (x^2 + \mathrm{i}y^2)\mathrm{d}z\right| \leqslant 2$.

3. 设 $C$ 为连接 –i 到 i 的右半圆周，证明

$$\left|\int_C (x^2 + \mathrm{i}y^2)\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi .$$

4. 计算下列沿曲线 $C$: $|z| = 1$ 的积分：

(1) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-2}$;　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\cos z}$;

(3) $\displaystyle\int_C z\mathrm{e}^z \mathrm{d}z$;　　(4) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 2z + 4}$.

5. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{\mathrm{e}^z}{z-2}\mathrm{d}z$;　　(2) $\displaystyle\int_{|z|=2} z^3 \cos z\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\int_{|z-2i|=\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1}\mathrm{d}z$;　　(4) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z^2+4)}$;

(5) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2}\mathrm{d}z$;

(6) $\displaystyle\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$, $C$ 为单连通区域 $D$ 内的任一闭路，$f(z)$ 在 $D$ 解析，且在 $D$ 内每点不为 0.

6. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{|z|=4} \left(\frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}z$;　　(2) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2}\mathrm{d}z$;

(3) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}}$, $C$ 是以 $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{6}{5}\mathrm{i}$ 为顶点的正方菱形;

(4) $\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2}$.

7. 计算积分 $\int_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$，其中

(1) $C$：$|z+1|=\frac{1}{2}$; (2) $C$：$|z-1|=\frac{1}{2}$; (3) $C$：$|z|=2$.

8. 计算积分 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$,

其中 $C$ 是一条闭路，合于下列条件之一:

(1) $z=0$ 在 $C$ 的内部, $z=1$ 在 $C$ 的外部;

(2) $z=1$ 在 $C$ 的内部, $z=0$ 在 $C$ 的外部;

(3) $z=0$, $z=1$ 都在 $C$ 的内部.

9. 证明：若 $\varphi(\zeta)$ 在一条简单曲线 $C$ 上连续，则在不含 $C$ 上点的任何区域 $D$ 内，函数

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

解析，并且有任意阶导数

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \quad (n=1,2,\cdots).$$

这里确定的函数的积分称为**柯西型积分**.

10. 用积分

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z+2}$$

计算积分

$$\int_0^{\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta.$$

11. 用积分

$$\int_{|z|=1} (z+\frac{1}{z})^n \frac{1}{z}\mathrm{d}z$$

计算积分

$$\int_0^{\pi} \cos^{2m}\theta\mathrm{d}\theta \text{ 及 } \int_0^{\pi} \cos^{2m-1}\theta\mathrm{d}\theta .$$

12. 分别由下列条件求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}\upsilon$：

(1) $u=2(x-1)y, f(2)=-\mathrm{i}$;

(2) $\upsilon=\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin x)+x+y, f(0)=0$.

13. 设 $f(z)=u+\mathrm{i}\upsilon$ 是区域 $D$ 内的解析函数，试证 $-u$ 是 $\upsilon$ 在 $D$ 内的共轭调和函数.

14. 若 $u(z)$ 是区域 $D_1$ 内的调和函数，$z=g(\zeta)$ 是区域 $D$ 内的解析函数，且其函数值都在 $D_1$ 内，试证复合函数 $u[g(\zeta)]=U(\zeta)$ 是 $D$ 内的调和函数.